

Vysoké učení technické v Brně

Fakulta stavební
Ústav stavební mechaniky



TEZE DIZERTAČNÍ PRÁCE

Nelineární projevy mechanických konstrukcí Nonlinear Symptoms of Mechanical Structures

verze pro Internet (Internet version)
<http://www.kitnarf.cz>

Obor: Teorie konstrukcí
Vypracoval: Ing. Petr Frantík
Školitelé: Ing. Zbyněk Keršner, CSc.
doc. RNDr. Jiří Macur, CSc.
Oponenti: doc. RNDr. Zdeněk Karpíšek, CSc.
Prof. Ing. Jiří Novotný, DrSc.
Prof. Ing. Jaromír Slavík, CSc.

Olomouc, srpen 2004
Obhájeno 15. listopadu 2004

1 Summary

The present thesis is concerned with applying the results of the latest research in the properties and possible behaviour of an extensive class of dynamic systems focussing on models of mechanical structures. It is proved here that non-linear symptoms (such as an unpredictable evolution) of a system that can describe a simple slender structure are determined by the intrinsic system qualities (no unknown external influences).

In the introduction, the non-linear symptoms of deterministic systems as they are known today are clearly outlined listing detailed descriptions of methods used for their observation and recognition.

The modelling of structures together with a derivation of the equations of motion for a geometrically non-linear model of a generally slender plane beam structure can be found in a self-contained chapter.

However, the main part of the thesis is dedicated to a dynamic experiment conducted. A special model is derived and described that has been developed specifically for the purposes of the thesis to be used for comparing the real observations and numerical computer simulations. It is demonstrated that, despite the complexity of the behaviour of a system, a good agreement can be achieved between the response of a real structure and that of its numeric model, which is particularly proved by comparing the bifurcation diagrams and significant limit cycles of a selected structure.

The thesis has been written as part of the MSM 261100009 research project "Non-traditional methods for investigating complex and vague systems", which is among the most important research activities carried out at Brno University of Technology since 1998.

OBSAH

1 Summary	2
2 Současný stav řešené problematiky	4
2.1 Chaos	4
3 Cíle práce	5
4 Nelineární jevy a nelineární chování	6
4.1 Bifurkace v dynamické úloze	7
4.1.1 Hopfova bifurkace	7
4.1.2 Bifurkace zdvojením periody	7
4.1.3 Superkritická vidličková bifurkace	8
4.2 Vznik/zánik limitní množiny	9
4.3 Chaotické chování	9
5 Zvolené metody zpracování	11
5.1 Projekce trajektorie	12
5.1.1 Projekce kmitání	12
5.2 Poincarého mapa	13
5.2.1 Mapa prvního návratu	14
5.2.2 Projekce kmitání	14
5.2.3 Identifikace limitní množiny	15
5.3 Bifurkační diagram	15
5.3.1 Ustálené chování	15
5.4 Speciální model konzoly	16
5.5 Experiment	18
5.5.1 Dynamické zatěžování	19
5.5.2 Konfigurace	20
5.5.3 Měření vlastností útlumu	20
5.5.4 Dynamický experiment	21
6 Hlavní výsledky práce	24
7 Závěr	25
Literatura	27
Autor	30

2 Současný stav řešené problematiky

Tato práce je vytvořena pro souhrnné zpřehlednění současných znalostí o bohatství možného chování mechanických konstrukcí, o metodách vyšetřování a zařazování pozorovaných a pozorovatelných jevů, ke kterým může na konstrukci docházet a zejména o provedených experimentech, jimiž je dokládána realita těchto popisovaných jevů.

Práce se opírá o nové poznatky dotýkající se širokého spektra vědních oborů, zvláště však o *teorii dynamických systémů* a *teorii chaosu*, které dávají základní rámec pro klasifikaci jevů, které byly dříve mnohdy opomíjeny či popřípadě nepřesně zařazovány.

Problematika, kterou se zde zabýváme, nám ukazuje kvalitativně nový pohled na procesy probíhající kolem nás a na možnosti jejich modelování. To hlavní, co nám dokládá toto nové vědní odvětví, lze říci jedinou větou: *”Celek je víc než pouhý součet částí”*. Převedeno do řeči stavební mechaniky: *”Poznání konstrukce nekončí vytvořením jejího modelu”*.

2.1 Chaos

Reálné systémy, ačkoliv mnohdy docela jednoduché, se mohou chovat velmi složitě. HENRI POINCARÉ již v roce 1899 při studiu *deterministického modelu*¹ pohybu tří gravitačně vázaných těles objevil druh pohybu, kterému dnes říkáme *deterministický chaos*. V současnosti již s jistotou víme, že deterministický chaos je nejsložitějším možným druhem chování deterministického systému [39].

Dnes je také zřejmé, že chování opírající se o přítomnost nelinearity v systému je v přírodě spíše pravidlem než výjimkou. Protože člověk se od svého ”uvědomění si se” nechává přírodou inspirovat², jistě může být přínosem zkoumání a vytváření systémů tohoto druhu.

Je třeba říci, že chaotické chování vzbuzuje zpravidla touhu po jeho odstranění či potlačení. Nyní ovšem existují i jiné pohledy, které chápou chaos jako žádoucí způsob chování. Chaos má totiž tyto kladné vlastnosti [39]:

- je ohraničeným chováním (tj. nemusí způsobit kolaps systému),
- vyznačuje se lepší absorbcí energie a hybnosti (není náchylný k destabilizujícím vlivům),
- je jistým způsobem odolný vůči rezonanci,
- je charakteristický mícháním (ztrácí se v něm informace o historii).

¹Deterministický model je systém, ve kterém je každý stav přesně určen stavem předcházejícím. V deterministickém modelu neuvažujeme nejistoty ve znalosti vlastností prvků systému a jejich interakcí.

²Živý svět kolem nás je zřejmě velmi dobře fungující optimalizační proces, jehož výsledky stojí za to podrobně zkoumat.

3 Cíle práce

Cílem práce byla zejména aplikace nových poznatků teorie nelineárních dynamických systémů, které mají význam pro sledování a simulace mechanických konstrukcí.

V teoretické části této práce bylo cílem ukázat klasifikační rámec, který může sloužit pro identifikaci nelineárních projevů mechanických konstrukcí. S tímto klasifikačním rámcem souvisejí způsoby sledování konstrukcí (zejména jejich pohybu). Proto bylo cílem práce také představit metody pro sledování a rozpoznávání nelineárních jevů.

Praktická část se věnuje výběru jednoduché mechanické konstrukce mající nelineární odezvu. Cílem bylo také užít, popř. vyvinout efektivní model této konstrukce a nalézt vhodné parametry pro experimentální srovnání. Provést experiment a aplikovat popsání metody sledování nelineárních jevů, včetně verifikace vybraného modelu.

4 Nelineární jevy a nelineární chování

Obecně platí, že je obtížné (ne-li nemožné) vytvořit mechanickou konstrukci, o které bychom mohli říci, že je její chování lineární. Toto tvrzení lze obhájit především tím, že známe elementární vlastnosti hmoty, ze které konstrukce tvoříme. Víme totiž, že libovolný materiál podléhá ve své podstatě zákonitostem, které unikají jednoduchému (natož lineárnímu) popisu. Oproti tomu lze však také obecně říci, že je možné vytvořit mechanickou konstrukci, která se bude, v předem zvoleném rozsahu, chovat *přibližně* lineárně.

Při projektování a stavbě konstrukcí existuje snaha co nejméně se odchylovat od požadavku jednoduché lineární odezvy konstrukcí, zejména s ohledem na bezpečnost a předvídatelnost chování takové konstrukce. Právě důsledná předvídatelnost je v současnosti podmínkou, která by měla být při projektování splněna. Tato podmínka u nelineárních systémů nemusí být splněna, jelikož jim je vlastní:

- možnost náhlé změny stavu při spojitě změně parametrů systému. Tuto náhlou změnu stavu nazveme *nelineárním jevem*,
- možnost vzniku *nestabilního chování*, při němž je předvídatelnost vývoje systému silně omezena.

Možnost náhlé změny stavu a možnost vzniku chaotického chování patří k tzv. *generickým vlastnostem* nelineárních systémů. Tj. tyto fenomény nejsou zapříčiněny nějakým vnějším nepoznaným faktorem, ale jsou vnitřní vlastností deterministického systému.

Je třeba si uvědomit zásadní odlišnost dynamiky nelineárních systémů od dynamiky lineárních systémů. Hlavním rozdílem je *bohatost* projevů nelineárních systémů, která patří rovněž k jejich generickým vlastnostem. Je zde patrný jistý posun ve složitosti. Tato bohatost s sebou přináší komplikace s identifikací nelineárních projevů, kterými se zde také budeme zabývat.

To jak odlišné je chápání pohybu v nelineárních dynamických systémech je patrné z následujících vět: Mluvíme-li zde o stavu dynamického systému, nemyslíme tím okamžitý stav systému v daném čase, ale stav pohybu tohoto systému³. V extrémním případě je samotný statický stav chápán jako rovnovážný výsledek pohybu.

Mnohé z nelineárních projevů jsou natolik význačnou událostí na konstrukci, že je lze považovat za měřítko výstižnosti modelu, kterým se snažíme konstrukci reprezentovat. Uveďme tedy nejběžnější projevy se kterými se můžeme setkat při sledování nelineárních dynamických systémů.

³Pojmy jsou zde více svázány s pohybem jako základním prvkem. Například *stacionárním stavem* (tj. v čase ne-proměnným) je myšlen ustálený pohyb systému na jednoduché limitní množině (periodický pohyb či statický stav).

4.1 Bifurkace v dynamické úloze

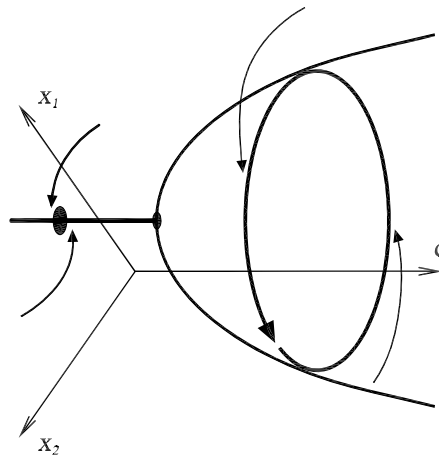
Bifurkace jsou jedním z nejdůležitějších projevů nelineárních dynamických systémů. Dochází k nim při plynulé změně jejich parametrů. Umožňují nám posoudit kvalitu modelu vzhledem k modelovanému objektu⁴. Bifurkací je více druhů a navíc provázejí vznik dalších nelineárních projevů.

Bifurkace zaznamenáváme zejména pomocí změn stacionárních stavů. Lze je znázornit v tzv. *bifurkačním diagramu* podobným způsobem jako bifurkace statického stavu (závislost stavu systému na řídicím parametru). Bifurkační diagram samotný bude vysvětlen v následující kapitole, jako jedna z metod sledování nelineárních jevů. O bifurkaci víme, že ze samotné podstaty se systém vždy v blízkosti bifurkačního bodu projevuje do jisté míry nestabilně.

4.1.1 Hopfova bifurkace

Hopfova bifurkace provází zrod/zánik limitního cyklu z limitního bodu. Ilustraci této bifurkace můžeme vidět na obr. 1.

Výskyt Hopfovy bifurkace lze zjistit např. u vzpěru ideálního prutu. Máme-li normálově tuhý prut zatížený normálovým periodickým zatížením, pak při nízké hodnotě zatížení bude stacionárním stavem limitní bod odpovídající přímému tvaru prutu. Dosáhneme-li určité vyšší hladiny zatížení (odpovídající kritické síle), pak již přímý tvar nebude stabilní a dojde ke zrodu limitního cyklu odpovídajícímu pokr-
itickému kmitání prutu.



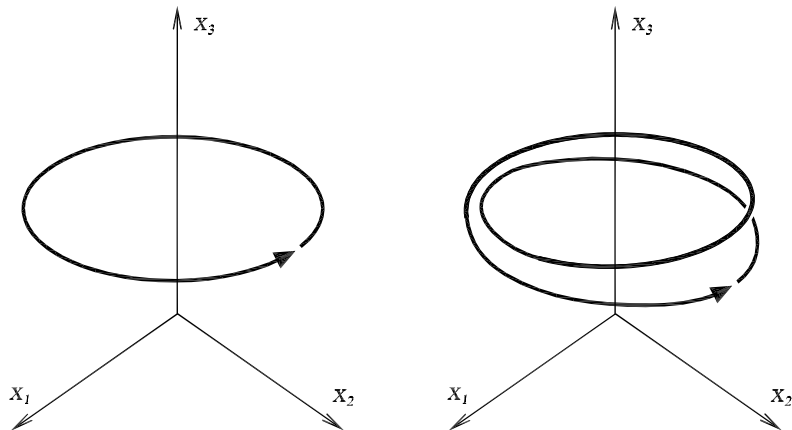
Obr. 1: Znázornění Hopfovy bifurkace ve dvourozměrném fázovém prostoru – zrodu limitního cyklu z limitního bodu. Osy x_1 a x_2 jsou stavové proměnné systému a třetí osa reprezentuje změnu parametru systému

4.1.2 Bifurkace zdvojením periody

Tato bifurkace, jak již její název napovídá, způsobí zdvojení (tj. zdvojnásobení)

⁴Modelovaným objektem může být samotná konstrukce, jiný model, výsledek jiné užití výpočetní metody či dokonce jen jiná diskretizace.

periody limitní množiny. Původní množina se náhle rozštěpí (viz limitní cyklus na obr. 2), přičemž "rozštěpené části trajektorie" se od sebe rychle lokálně vzdálí. Zdroj této bifurkace je třeba spatřovat v nárůstu nelinearity odezvy.

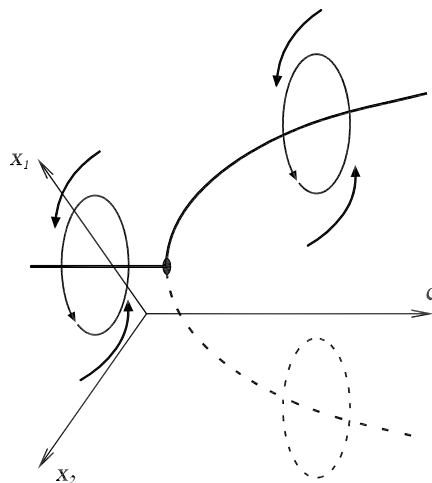


Obr. 2: Znárodnění bifurkace zdvojení periody limitního cyklu v trojrozměrném fázovém prostoru. Vlevo – původní limitní cyklus, vpravo – zdvojený limitní cyklus

Poznamenejme, že zdvojit se může i zdvojená limitní množina (dojde k další bifurkaci). Taková následná zdvojení limitní množiny se mohou vyskytovat pravidelně. Mluvíme pak o tzv. *kaskádě bifurkací*.

4.1.3 Superkritická vidličková bifurkace

Při této bifurkaci zaniká stacionární stav při současném vzniku dvou nových stacionárních stavů. Dojde-li u dynamického systému k této bifurkaci, pak systém přejde na jeden ze dvou možných stacionárních stavů. Tento proces je ilustrován na obr. 3.



Obr. 3: Znárodnění superkritické bifurkace v dvourozměrném fázovém prostoru

U této bifurkace se významně projevuje narušení symetrie. Vlivem imperfekce je jedna větev zvýhodněná a druhá znevýhodněná, jak je známo z problému vzpěru prutu. Úloha vzpěru prutu je rovněž vhodná pro ilustraci výskytu této bifurkace .

Mějme ideální prut zatížený ve vzpěru v čase neproměnnou silou. Nechť je na prutu také jiné, např. harmonické zatížení, působící příčně (dochází k ohybu prutu). Situace na obr. 3, pak může odpovídat dosažení kritické hodnoty vzpěrné síly (která je v čase neproměnná). Tj. bude-li prut vzhledem k vzpěrné síle v překritickém stavu, pak se ustálí do jediného limitního cyklu. Překročí-li tato síla kritickou hodnotu, pak dojde k vybočení prutu s tím, že prut může nadále kmitat na jedné či na druhé straně (v rovinném případě) vlivem stále působícího "malého" příčného harmonického zatížení.

4.2 Vznik/zánik limitní množiny

Limitní množiny dynamických systémů mohou vznikat či zanikat při změnách parametrů⁵. Příčiny a průběh těchto *katastrof* mohou být různé. To co je spojuje bývá dramatický nástup a průběh takového děje. Dostává-li se systém k takovému bodu, pak pochopitelně ztrácí stabilitu. Přesnost zmapování okamžiku vzniku/zániku limitní množiny je dána především velikostí skoku změny klíčového parametru. Příčinou tohoto faktu je množství potenciální/kinetické energie, která se uvolní při změně tohoto parametru.

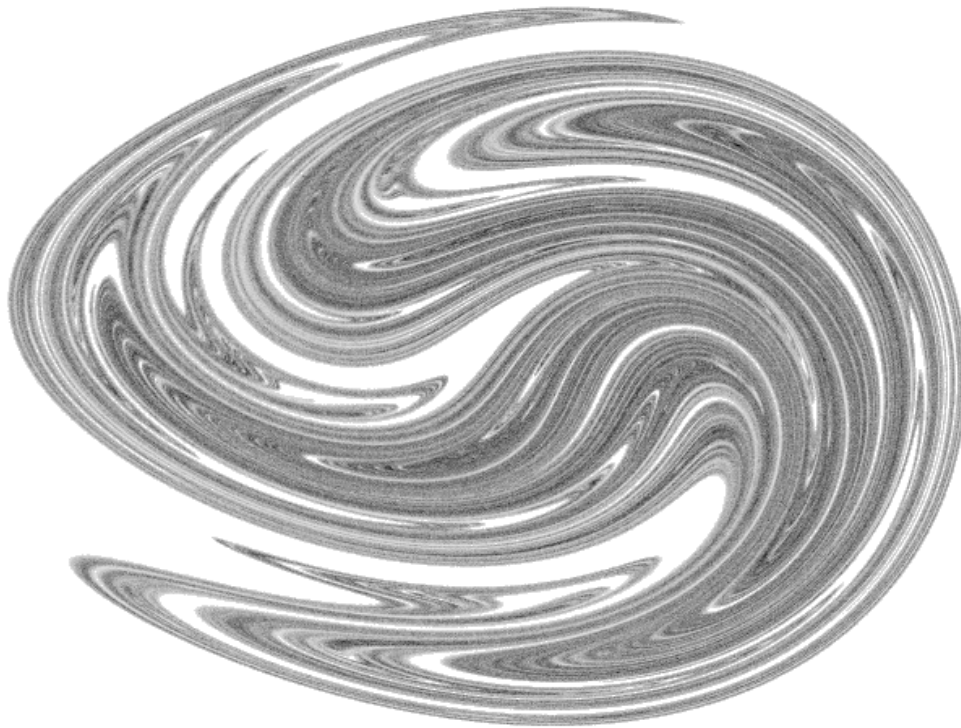
4.3 Chaotické chování

Chaotické chování deterministického dynamického systému je rozhodně fenoménem se zvláštními vlastnostmi. Svůj název dostalo od slova, které vždy symbolizovalo ne-řád, tj. nepřítomnost řádu. Zkoumáním chaotických atraktorů – tzv. *podivných* limitních množin – lze ovšem zjistit, že nepřítomností řádu tyto struktury rozhodně netrpí, viz obr. 4. Naopak, forma uspořádanosti chaotických atraktorů je v jistém smyslu vyšší formou řádu, viz [30].

Chaotické chování je nestabilním pohybem v omezené oblasti fázového prostoru. Je charakteristické tím, že původně blízké trajektorie se lokálně exponenciálně rychle vzdalují – tomuto efektu se říká *strečing* (natahování). A zároveň globálně, z hlediska rozměru atraktoru, zůstávají stále ve své blízkosti – díky efektu s názvem *foldng* (přehýbání). Výsledkem těchto dvou efektů je nekonečně zvrásněná plocha, po které se pohybuje nekonečná trajektorie, aniž by se kdy protнула. Tento typ často se vyskytujícího chaotického chování je topologicky ekvivalentní tzv. *pekařské transformaci*, viz např. [19], která názorně vystihuje jeho povahu.

Protože je chaotické chování nestabilní, tak nelze jednoduchým způsobem rozhodovat o stabilitě numerických metod pro řešení odpovídajícího dynamického systému. Libovolně malá změna jakéhokoliv vstupu (počáteční podmínky, metoda řešení, způsob reprezentace čísel, atd.) nevyhnutelně vede k odlišným výsledkům. Pokud chceme posoudit stabilitu řešení při chaotickém pohybu, je třeba sledovat strukturu

⁵Vznikem či zánikem limitní množiny zde není myšlena změna jejího charakteru bifurkací.



Obr. 4: Řez chaotickým atraktorem, který je produktem silně nelineárního dynamického systému se třemi stavovými proměnnými

samotného atraktoru. Nemění-li se jeho struktura při změně vstupů, pak lze usuzovat na stabilitu řešení.

Skutečnost praktické neopakovatelnosti a nepředvídatelnosti trajektorie při pohybu na chaotickém atraktoru vede k algoritmickým obtížím s jeho identifikací. Existují případy, kdy je v současnosti jediným spolehlivým identifikačním prostředkem pouze lidský mozek, viz např. [26].

5 Zvolené metody zpracování

V předcházejících kapitolách jsme uvedli různé nelineární projevy, ke kterým může docházet při vývoji stavu mechanických konstrukcí. Známe nyní podstatu některých jevů, ale mohou nám chybět účinné metody jejich sledování. Tato kapitola se věnuje používaným metodám zobrazování stavu a vývoje systémů založených většinou na použití fázového prostoru.

Řešíme-li dynamický model reálné konstrukce, pak máme často k dispozici velmi mnoho údajů vyjadřující stav systému v čase. Model má zpravidla mnoho stavových proměnných (dle počtu stupňů volnosti), aby dobře vystihoval chování dané konstrukce. Víme, že počet stavových proměnných nám určuje dimenzi fázového prostoru. Tento fakt činí přímé zobrazení trajektorie obtížným, vzhledem k tomu, že jsme schopni vnímat jen tři prostorové dimenze. Prvním problémem je tedy zobrazení ve vícerozměrném fázovém prostoru.

Vyvíjí-li se dynamický systém v čase, pak často dochází k hustému zaplnění oblasti fázového prostoru trajektorií. Těžko pak zjišťujeme, co se s ním stalo. Problémem druhým je proto rozpoznání stavu a změny stavu systému.

Třetí problém je správná interpretace výsledků experimentu či numerického výpočtu. Protože například z podstaty nelinearity systému víme, že může mít více limitních množin při stejné konfiguraci systému. Dále také může být obtížné odlišit chaotické chování od přechodového stavu, apod.

Z popsaných potíží je vidět komplexnost poznávání systému. Situaci nám jistě zjednoduší zaměření se na dílčí části. Z hlediska toho jaké informace chceme o systému získat, můžeme provést následující rozdělení (řazeno podle náročnosti):

- sledování systému pro jeho jedinou konfiguraci – závislost chování systému na počátečních podmínkách,
- vývoj ustálených stavů systému při změně parametrů – hledání bifurkací, chaotického chování, atd.,
- sledování přechodových dějů – ustalování systému, stabilita ustálených stavů, apod.

Již jsme uvedli, že většina účinných metod sledování systému užívá prostor všech možných stavů systému, kde se jeho vývoj zobrazuje jako spojitá parametrická křivka – trajektorie. Výhodou tohoto přístupu je, že se chování systému v tomto prostoru podobá běžným zkušenostem. Dochází-li k ustalování systému, pak se trajektorie ve fázovém prostoru "usadí" v určité jeho části – limitní množině, což se často velmi podobá misce, v níž krouží kulička. Je-li tato miska složitá, lze očekávat složitý pohyb kuličky – chaotické chování. Dostane-li kulička příliš mnoho energie, může z misky "vyskočit" a skončit v jiné misce, apod.

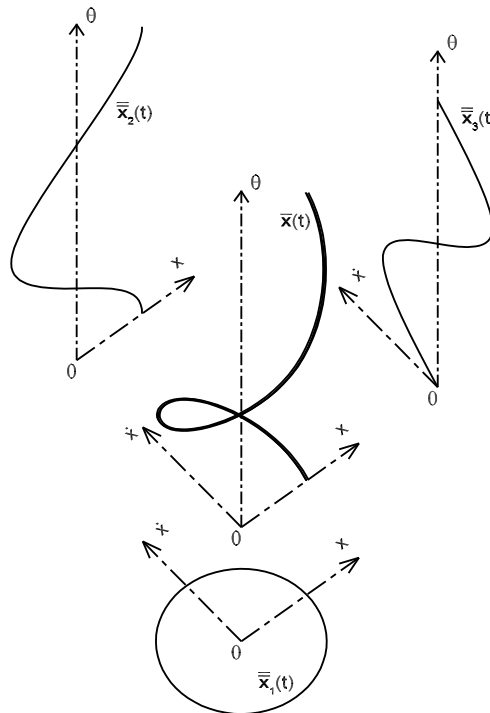
5.1 Projekce trajektorie

Projekce trajektorie je první ze základních zobrazovacích prostředků pro snížení počtu dimenzí. Poznamenejme, že projekce je náš přirozený nástroj vnímání, jinak bychom byli doslova "zaplaveni" množstvím informací.

Mějme n -dimenzionální dynamický systém, jehož trajektorii $\mathbf{x}(t)$ chceme zobrazit na dvoudimenzionální plochu. Pak postačuje vybrat dvě stavové proměnné, např. x_i a x_j , které budou reprezentovány dvěma osami zobrazovací plochy. Definujme projekci trajektorie $\bar{\mathbf{x}}(t)$:

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} x_i(t) \\ x_j(t) \end{bmatrix}, \quad \text{kde } i, j \in 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

kterou vyneseme do zobrazovací plochy. Vybíráme zpravidla takové stavové proměnné, které mají největší význam. Například při ohybovém kmitání prostě uloženého nosníku vybereme příčnou výchylku středu prutu a rychlost této výchylky. V případě harmonické odezvy nosníku pak bude projekcí trajektorie elipsa, viz obr. 5.



Obr. 5: Znárodnění trojice projekcí ustáleného harmonického kmitání – jednoduchého limitního cyklu, kde x je výchylka, \dot{x} je rychlost výchylky a θ je fázový úhel harmonické síly $F(t) = A \sin \theta$

5.1.1 Projekce kmitání

V této práci budeme užívat projekci zvláště vhodnou pro ohybové kmitání jednoduché rovinné konstrukce s více stupni volnosti, ale jediným dynamickým zatížením – harmonickou silou nebo harmonickým zrychlením.

V první řadě provedeme projekci tohoto systému takovou, že vybereme pouze jediný bod na konstrukci a jediný směr jeho pohybu. Polohu vybraného bodu ve vybraném směru označíme $x(t)$ a rychlost změny této polohy $\dot{x}(t)$. Tím jsme odstranili všechny ostatní polohové stavové proměnné. Jelikož je na konstrukci harmonického zatížení, tak třetí stavovou proměnnou bude fázový úhel harmonického zatížení $\theta(t)$, pro který bude platit:

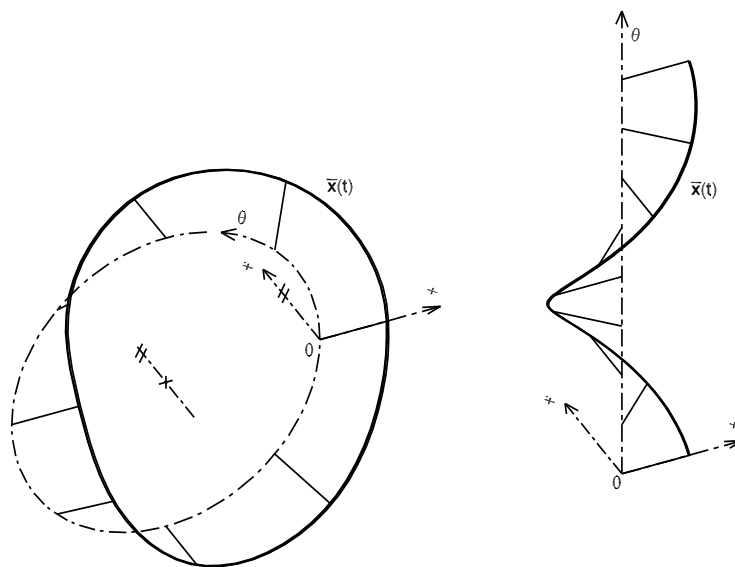
$$\theta(t) = \Omega t + \theta_0, \quad (2)$$

kde Ω je úhlová frekvence harmonického zatížení a θ_0 je počáteční podmínka pro fázový úhel θ . Obecné harmonické zatížení $z(t)$ pak můžeme psát ve tvaru:

$$z(t) = A \sin \theta, \quad (3)$$

kde A je amplituda zatížení. Výsledek projekce při harmonickém ustáleném pohybu byl již vidět na obrázku 5 pod označením $\bar{x}(t)$, přičemž lze užít další projekci označenou $\bar{\bar{x}}_1(t)$ pro zobrazení do roviny. Tato projekce je vhodná zejména proto, že je zde možné velmi zřetelně a rychle odlišit změny v chování systému.

Všimněme si, že stavová proměnná θ je tzv. *cyklická souřadnice*. Reprezentuje totiž fázový úhel. Výpočet fázového úhlu θ tedy můžeme upravit tak, že bude platit $\theta \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Tato úvaha je dobře ilustrovatelná geometrickou transformací na obr. 6.



Obr. 6: Transformace kartézského souřadného systému (vpravo) do válcového souřadného systému (vlevo) vystihující cyklickou povahu stavové proměnné θ

5.2 Poincarého mapa

Poincarého mapa je druhý z nástrojů pro snížení počtu dimenzí zobrazení trajektorie systému. Zjednodušeně je Poincarého mapa řezem trajektorie ve fázovém prostoru vybranou nadplochou.

Nejčastěji se provádí řez rovinou kolmou na vybranou stavovou proměnnou, řekněme x_p . Rovnice řezné roviny tak může být ve tvaru $x_p = a$, kde a je průsečík řezné roviny s osou stavové proměnné x_p . Poincarého mapa trajektorie $\mathbf{x}(t)$ je pak množina všech bodů této trajektorie, pro které platí $x_p = a$.

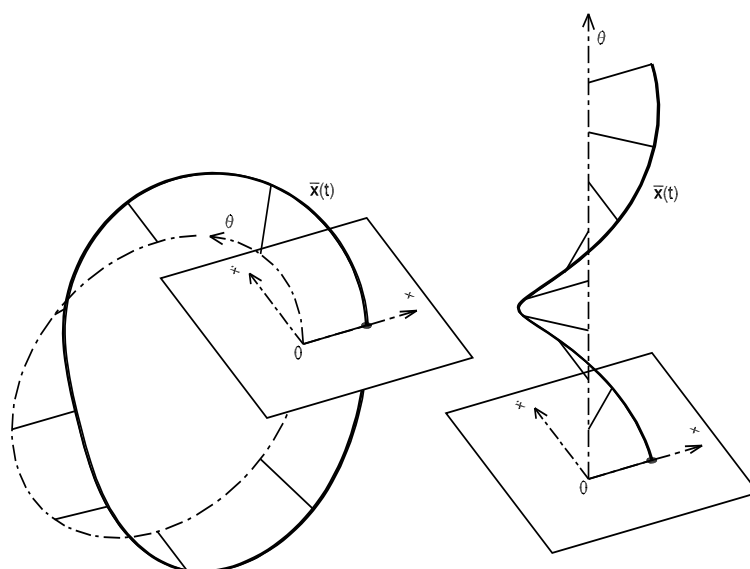
Pro vizualizaci n -dimenzionální Poincarého mapy lze užít projektivní zobrazení popsané v předchozí kapitole .

5.2.1 Mapa prvního návratu

Uvažovat Poincarého mapu jen jako řez trajektorií je z hlediska jejího významu nedostatečné. Poincarého mapa je totiž v teorii dynamických systémů chápána jako speciální zobrazení, které danému bodu řezu trajektorie přiřadí následující bod řezu trajektorie. Z definice dynamického systému vyplývá, že je toto zobrazení jednoznačné. Těchto vlastností Poincarého map se užívá při podrobnější analýze vícerozměrných systémů.

5.2.2 Projekce kmitání

Vraťme se ke konkrétní projekci trajektorie systému popsané v předchozí kapitole . Pro kmitající konstrukci, za výše daných předpokladů, je vhodné vést řez trajektorie rovinou $\theta = 0$. Tento řez je ilustrován na obrázku 7.

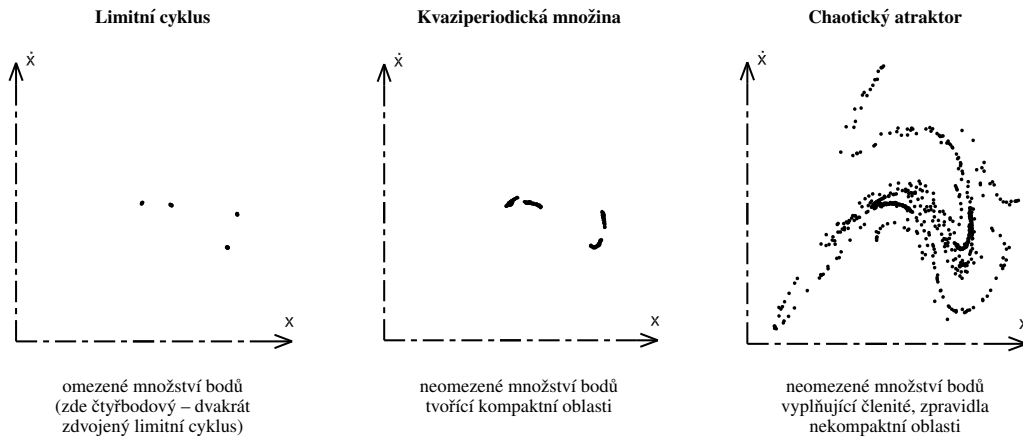


Obr. 7: Ilustrace vytváření Poincarého mapy řeznou rovinou $\theta = 0$

Na obr. 7 je vidět provedení řezu jednoduchým limitním cyklem rovinou $\theta = 0$. Vidíme také, že jednoduchý limitní cyklus bude mít v takové Poincarého mapě pouze jediný bod. Každé zmnožení bodů či náhlá změna jejich polohy, jasně signalizuje nelineární jev.

5.2.3 Identifikace limitní množiny

Jelikož je Poincarého mapa rovinným řezem trajektorie, nedochází na ní při projekci k překrývání částí trajektorie, jak je tomu u projekce trajektorie. Díky této vlastnosti se dobře hodí k identifikaci limitní množiny. V tabulce 1 jsou zobrazeny charakteristické Poincarého mapy limitních množin.



Tab. 1: Poincarého mapy různých druhů limitních množin

5.3 Bifurkační diagram

Tento nástroj slouží pro zobrazení a identifikaci změn chování dynamického systému při změně jeho konfigurace (změně jeho parametrů). Pro jeho konstrukci se využívá Poincarého mapa. Lze říci, že bifurkační diagram je geometricky uspořádaná množina (graf) Poincarého map pro různé (spojitě se měnící) parametry systému.

Bifurkační diagram lze konstruovat za různých podmínek:

- pro každou změnu parametrů startuje nový systém se stále stejnými počátečními podmínkami,
- pohybující se systém je podroben malé změně parametru, aniž by byl znovu spouštěn (tj. provedení změny parametrů "za chodu"),
- systém je pro každou změnu parametrů spuštěn mnohokrát s různými (zpravidla náhodně generovanými) počátečními podmínkami.

5.3.1 Ustálené chování

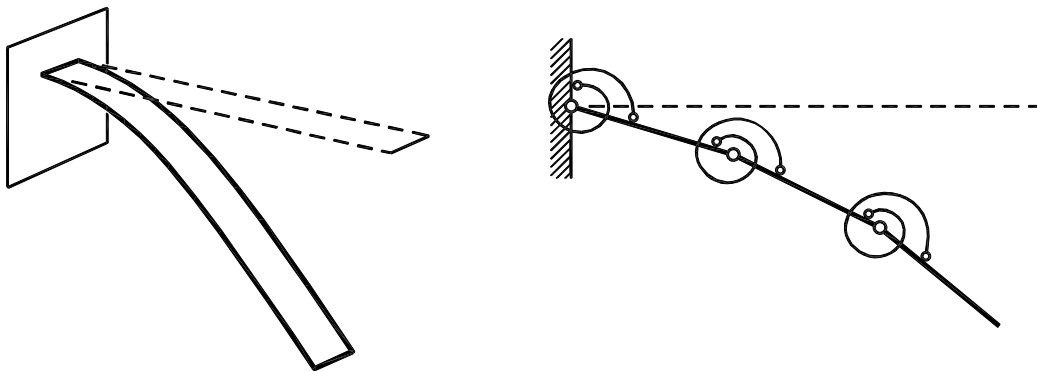
Nejčastěji používaným je bifurkační diagram ustáleného chování. Zobrazení Poincarého mapy celé trajektorie by totiž bylo na úkor přehlednosti diagramu. V bifurkačním diagramu ustáleného chování tak můžeme být přímo svědky bifurkací limitních cyklů, kaskád bifurkací, náhlých změn stavu či vzniku a rozvoje chaotického chování, viz obrázky 1, 2, 3.

Požadavek ustálení systému pro konstrukci Poincarého mapy v sobě skrývá určité komplikace. Hlubší úvahou zjistíme, že vzhledem k existenci chaotického chování a nestabilní přechodové oblasti není snadné rozhodnout, zdali již došlo k ustálení systému. Tento problém je obzvláště závažný u kmitání reálných konstrukcí, kde se nevyhneme těžko poznatelným vlivům na chování konstrukce.

Problém ustálení lze nejjednodušeji řešit nastavenou, dostatečně dlouhou dobou, po kterou se systém ustaluje. Slovním spojením "dostatečně dlouhá doba" myslíme takový časový interval, jehož prodloužení neovlivní významně tvar bifurkačního diagramu. Jedná se tedy o ověření konvergence. Lepších výsledků (snížení časové náročnosti) můžeme dosáhnout užitím vhodného ukazatele ustálení. Těmito ukazateli mohou být například tzv. *agregované atributy* systému, viz [26].

5.4 Speciální model konzoly

Pro simulaci ohybového kmitání štíhlého konzolového nosníku byl vytvořen model, jako zvláštní případ aplikace *metody tuhých fyzických konečných prvků* [16]. Důvodem užití tohoto modelu je jeho jednoduchost a zejména nenáročnost na dobu výpočtu. Minimální výpočetní čas je přímo úměrný nejvyšší frekvenci, kterou bude model či jeho prvek kmitat. V případě modelu štíhlého nosníku z oceli jsou nejvyšší frekvence dosahovány při normálovém kmitání (kmitání pružných prvků nahrazujících normálovou tuhost). Normálové kmitání má nicméně malý vliv na globální chování nosníku kmitajícího převážně příčně. Proto se nabízí možnost vytvořit model normálově tuhý a omezit tak vznik vyšších frekvencí.



Obr. 8: Konzolový nosník a jeho model

Konzolový nosník konstantního průřezu o hmotnosti m_c , délky l_c a ohybové tuhosti EI , nahradíme zvoleným počtem stejně dlouhých tuhých dílců vzájemně spojených klouby s lineárními rotačními pružinami (předpokládejme lineárně pružný materiál), viz obr. 8. Pohybové rovnice, jejichž odvození je v dizertační práci uvedeno, lze zapsat ve maticovém tvaru:

Matice \mathbf{C} je maticí útlumu. Je-li tato matice konstantní, pak se jedná zřejmě o jednu z nejjednodušších aproximací tlumení – útlum lineárně závislý na rychlosti posunutí.

S pomocí experimentů, o kterých bude řeč v následující kapitole, bylo zjištěno, že chování reálné konstrukce dobře vystihuje matice útlumu ve tvaru:

$$\mathbf{C} = cm \begin{bmatrix} 1 + c_a|\omega_1| & & & \\ & 1 + c_a|\omega_2| & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & 1 + c_a|\omega_n| \end{bmatrix}, \quad (8)$$

kde c je globální koeficient útlumu a c_a je bezrozměrný kvadratický koeficient uplatňující se zejména při velmi velkých posunutích (souvisí zřejmě s odporem vzduchu, který je závislý na druhé mocnině rychlosti).

Vektor \mathbf{F} reprezentuje ohybové momenty síly F . Platí:

$$\mathbf{F} = F_x l \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 \\ \cos \varphi_2 \\ \dots \\ \cos \varphi_n \end{bmatrix} - F_y l \begin{bmatrix} \sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_2 \\ \dots \\ \sin \varphi_n \end{bmatrix}, \quad (9)$$

kde F_x je složka síly F ve směru osy x (osa nepřetvořeného prutu) a F_y je složka síly F ve směru osy y (osa kolmá na osu nepřetvořeného prutu v rovině ohybu).

Pro vektor momentů setrvačných sil \mathbf{A} platí:

$$\mathbf{A} = a_x l \begin{bmatrix} \left(\frac{(2(n-1)+1)}{2}m + m_a\right) \cos \varphi_1 \\ \left(\frac{(2(n-2)+1)}{2}m + m_a\right) \cos \varphi_2 \\ \vdots \\ \left(\frac{1}{2}m + m_a\right) \cos \varphi_n \end{bmatrix} - a_y l \begin{bmatrix} \left(\frac{(2(n-1)+1)}{2}m + m_a\right) \sin \varphi_1 \\ \left(\frac{(2(n-2)+1)}{2}m + m_a\right) \sin \varphi_2 \\ \vdots \\ \left(\frac{1}{2}m + m_a\right) \sin \varphi_n \end{bmatrix}, \quad (10)$$

kde a_x je složka zrychlení a ve směru osy x (osa nepřetvořeného prutu) a a_y je složka zrychlení a ve směru osy y (osa kolmá na osu nepřetvořeného prutu).

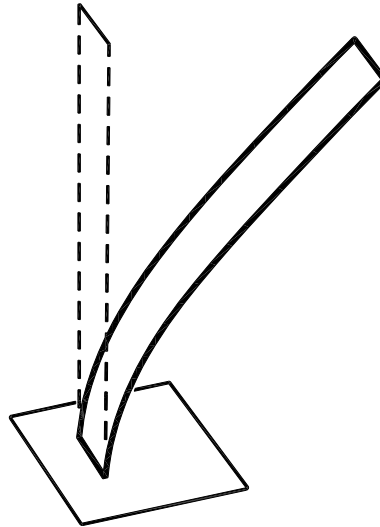
5.5 Experiment

Pro experimentální výzkum byla po náročném rozhodování (viz dizertační práce) vybrána úloha dynamického vzpěru velmi štíhlého ocelového konzolového nosníku. Svisle orientovaný prut konstantního průřezu, pevně vetknutý svým dolním koncem (viz obr. 9), je podroben vertikálnímu zrychlení.

Vybraná ocel je materiál, který se chová pružně v dostatečně velkém rozsahu. Přitom, užije-li se štíhlý nosník z této oceli, může docházet k velkým posunutím při malých přetvořeních⁶, což zajistí setrvání materiálu v lineárně pružné oblasti působení.

⁶Posunutím máme na mysli změnu polohy bodů konstrukce (posun, pootočení). Přetvoření zde zastupuje relativní změnu vzdálenosti dvou blízkých bodů materiálu.

Zdrojem nelinearity odezvy konstrukce jsou právě velká posunutí a obzvlášť pokritické působení při vzpěru prutu (existují dva statické stavy). Z hlediska stability přímého tvaru prutu je rozhodující pro dosažení kritického stavu vertikální zrychlení (tj. ve statickém stavu nejjednodušeji gravitace).



Obr. 9: Znáornění vybrané úlohy pro experimentální výzkum: Svislý vzpíraný vetknutý prut v pokritickém stavu

5.5.1 Dynamické zatěžování

Pro dynamické zatěžování konstrukce bylo zvoleno vertikální harmonické přemístění bodu vetknutí prutu. Dle *principu ekvivalence* lze zrychlení vyvolané přemístěním chápat jako změnu intenzity gravitačního pole, čehož je využito v numerickém modelu úlohy.

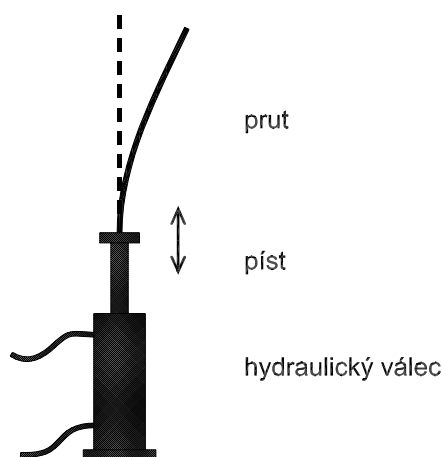
Z hlediska realizace je ovšem vytvoření harmonického pohybu v přímce obtížné. Jedním z možných řešení, které také bylo užito, je umístění prutu na pohyblivém konci pístu hydraulického zařízení, viz obr. 10. Píst, zvedaný hydraulickým zařízením řízeným počítačem, koná harmonický pohyb⁷ s danou úhlovou frekvencí Ω a s danou amplitudou posunutí A_{displ} . Těmito dvěma nastavitelnými parametry je určována amplituda zrychlení pístu A_{accel} dle vztahu⁸:

$$A_{accel} = A_{displ} \Omega^2. \quad (11)$$

Z tohoto vztahu vyplývá, že pro dosažení dostatečně velkého zrychlení (vzhledem ke gravitaci) je potřeba buď vysoké frekvence pístu nebo velké amplitudy posunutí pístu. Oba směry zvyšování amplitudy zrychlení ovšem narážejí na reálná omezení.

⁷Poznamenejme, že reálná zařízení dosahují harmonického pohybu vždy v určitém přiblížení. V případě hydraulického zařízení se přesnost harmonického pohybu snižuje se vzrůstající frekvencí.

⁸Vztah je odvozen z pohybové rovnice pístu za předpokladu jeho harmonického pohybu.



Obr. 10: Experimentální sestava pro dynamické zatěžování

5.5.2 Konfigurace

Numerické simulace experimentu ukázaly, že na nelineární jevy bohatá oblast v konfiguračním prostoru (prostor parametrů systému) je poměrně úzká. Výsledkem provedených simulací a hledání (včetně měření vlastností) vhodného prutu je následující konfigurace parametrů prutu z oceli:

- délka prutu $l_c = 30$ centimetrů,
- hmotnost prutu $m_c = 9.03$ gramů,
- ohybová tuhost prutu $EI = 0.0053 \text{ Pa}\cdot\text{m}^4$,
- přidaná hmota na konec prutu $m_a = 13.54 \text{ g}$.

Reálným experimentálním zatěžovacím zařízením byla těžká hydraulická zatěžovací souprava (zkonstruovaná pro dynamické zatěžování velkých stavebních objektů), kterou vlastní partnerská univerzita Bauhaus-Universität Weimar v Německu. Konfigurace parametrů této soupravy je následující:

- zvolená frekvence pístu (dle parametrů prutu) $f_{load} = 0.5 \text{ Hz}$ (tj. úhlová frekvence $\Omega_{load} = 3.1416 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$),
- maximální amplituda posunutí pístu $A_{displ} = 10 \text{ cm}$ (tj. maximální amplituda zrychlení $A_{accel} = 0.987 \text{ m}\cdot\text{s}^2$ při zvolené frekvenci pístu f_{load}).

5.5.3 Měření vlastností útlumu

Tlumení, doprovázející kmitání konstrukce, je teoreticky nejsložitější součástí studovaného systému. Zjištění vlastností útlumu a jeho reprezentace v numerickém modelu se zakládalo na vystižení důsledků tlumících jevů na chování systému. Pro tento účel byl proveden oddělený dynamický experiment, jenž byl zaměřen na měření amplitud příčné výchylky prutu při volném kmitání. Volné kmitání bylo započato udělenou počáteční deformací prutu (orientovaného ve vertikální pozici)

takovou, aby přibližně odpovídala stavu prutu při kmitání v oblasti velkých posunutí.

S podporou numerických výpočtů bylo zjištěno, že lineární útlum je nevyhovující. Obálka amplitud při volném kmitání se totiž výrazně odchylovala od exponenciály. Tento problém vyřešilo rozšíření funkce útlumu na polynom druhého stupně, přidáním kvadratického členu: tlumicí moment $T(\omega) = c\omega(1 + c_a|\omega|)$, viz vztah (8). Koeficienty polynomu byly stanoveny:

- koeficient útlumu $c = 0.002 \text{ Nm}\cdot\text{s}\cdot\text{kg}^{-1}$,
- kvadratický koeficient $c_a = 1.00$ (bezrozměrný).

5.5.4 Dynamický experiment

Zvolená úloha je z technického hlediska velmi jednoduchá. Díky tomu byly dynamické experimenty s reálnou konstrukcí mnohokrát opakovány. Získaly se tak bohaté zkušenosti s odezvou konstrukce na zvolené počáteční podmínky a zvolené parametry zatěžování. Z experimentů byla patrná nestabilní přechodová oblast pohybu konstrukce – pro "stejně" podmínky docházelo k ustalování pohybu konstrukce za různě dlouhou dobu a různým způsobem. Vše nasvědčovalo tomu, že se systém chová složitě.

Provádění experimentů bylo znesnadněno tím, že zatěžovací souprava nebyla konstruována pro změnu parametrů během zatěžování. Změna amplitudy posunutí pístu tedy byla provedena až po zastavení a opětovném spuštění zatěžování.

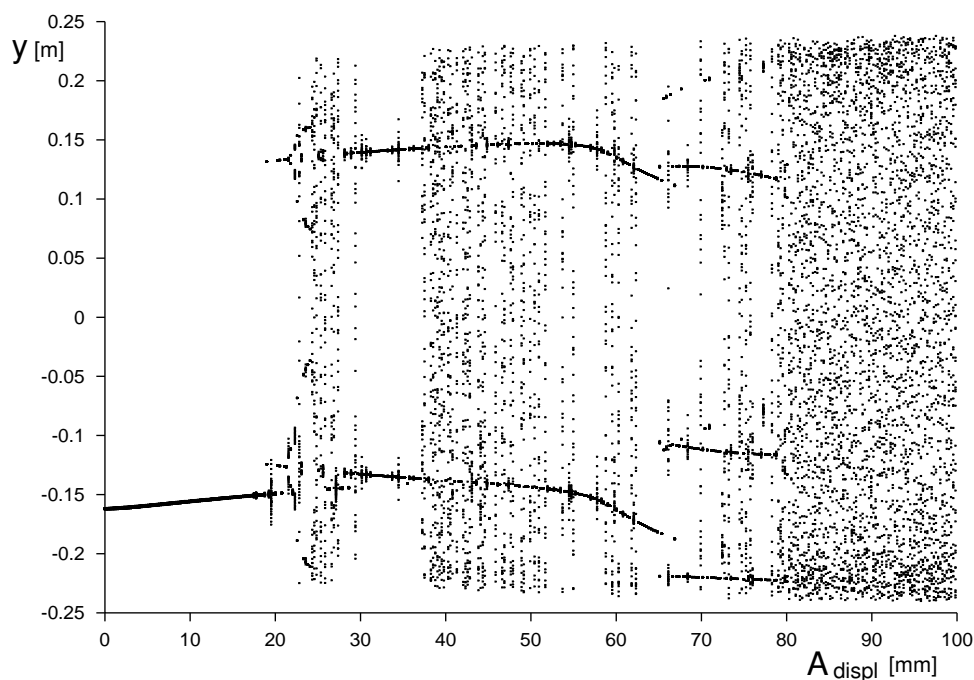
Pro měření posunutí prutu sloužily dvě videokamery, průmyslová černobílá se snímací frekvencí 10 Hz s rozlišením 1291×1029 pixelů a komerční barevná SONY DCR se snímací frekvencí 25 Hz s rozlišením 720×576 pixelů. Záznam z průmyslové kamery byl vyhodnocován speciálním geodetickým softwarem. Pro analýzu záznamu z komerční kamery byl užit autorem vyvinutý program.

Výhodou tohoto experimentu byla snadná vizuální identifikace stavu pohybu konstrukce. Dominantní limitní cykly šlo jednoduše rozpoznat. Tento fakt a náročnost získání dat⁹ z měření videokamerami způsobil, že se organizování experimentu podřízvalo informacím získaným vizuálním pozorováním.

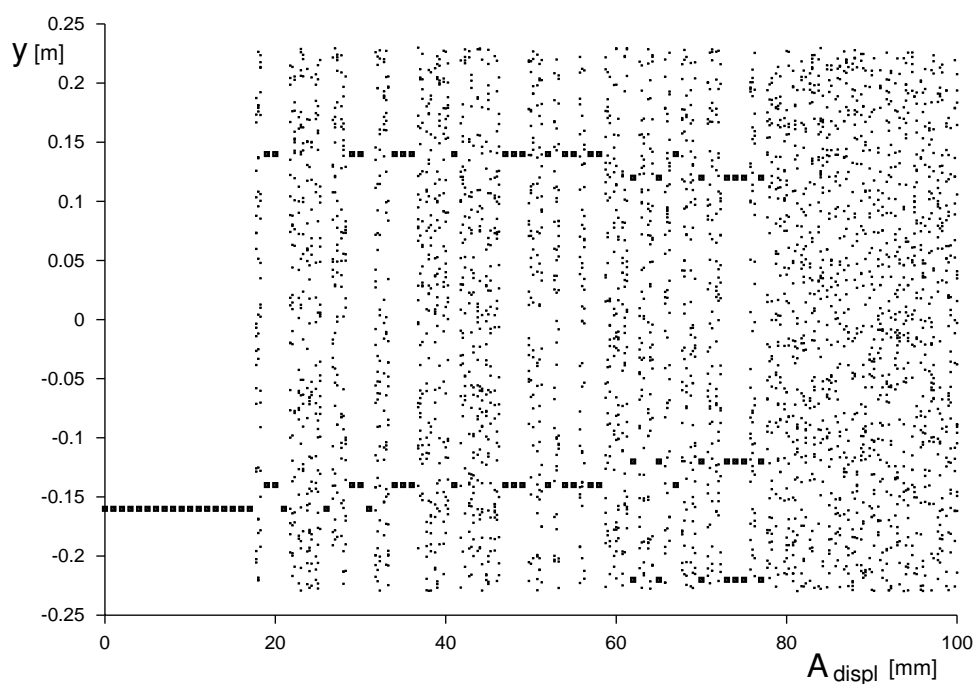
Na obr. 11 a 12 jsou zobrazeny získané bifurkační diagramy: bifurkační diagram z numerické simulace – obr. 11 a schematický bifurkační diagram z experimentu – obr. 12. Pro každou změnu řídicího parametru (amplituda posunutí A_{displ}) startoval systém ze stabilního statického stavu na straně imperfekce a ustaloval se 300 sekund.

Z bifurkačního diagramu je patrné, že se sledovaný systém chová složitě. Tento závěr lze učinit z přítomnosti raného nestabilního chování (mnoho zdánlivě neuspořádaných bodů), nepřítomnosti kaskády bifurkací a současné existence více lim-

⁹Třímínutové měření videokamerou – běžná doba zatěžovacího cyklu – odpovídá analyzování více než 10 GB nekomprimovaných dat. Vybavení k analýze v reálném čase bohužel nebylo k dispozici.



Obr. 11: Bifurkační diagram získaný numerickým výpočtem – pro každou hodnotu parametru nový start systému



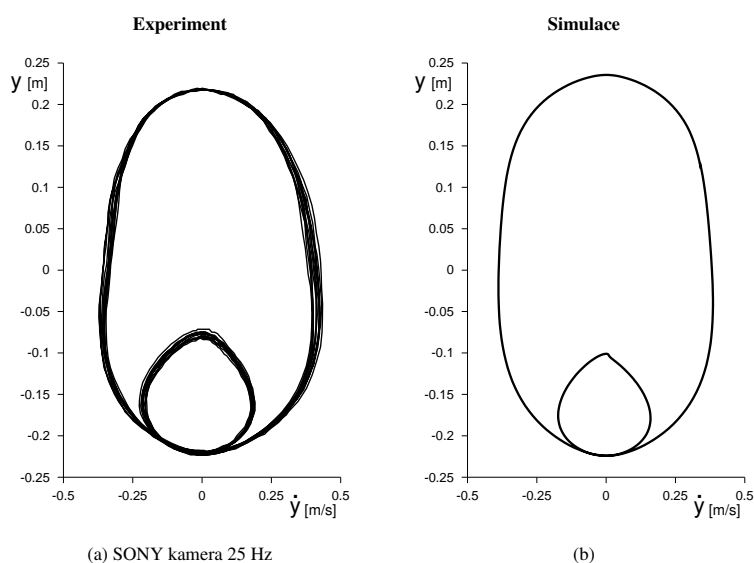
Obr. 12: Schematický bifurkační diagram získaný z experimentu – pro každou hodnotu parametru nový start systému

itních množin. Příčinou je zřejmě pokritický stav prutu, který už od počátku vnesl do systému velmi silnou nelinearitu.

Srovnání bifurkačních diagramů z numerické simulace a z experimentu ukazuje reálnost a zachytitelnost chaotického chování. V tomto smyslu se vybraná konstrukce dobře osvědčila.

Z videozáznamů kmitání konstrukce byly obrazovou analýzou získány zejména časové řady příčné výchylky y volného konce prutu. Pro vykreslení projekcí limitních cyklů bylo ovšem zapotřebí znát také časové řady rychlostí příčné výchylky \dot{y} . Pro jejich získání byl vytvořen program, jenž odhaduje derivace časové řady příčné výchylky lokální – "klouzavou" aproximací. Pro tuto aproximaci byl užit polynom druhého stupně, jímž se aproximovalo alternativně 7 po sobě jdoucích bodů ze záznamu s frekvencí 10 Hz a 9 bodů ze záznamu s frekvencí 25 Hz (odpovídá jednotlivým videokamerám).

Na obr. 13 je srovnání limitního cyklu s trojnásobnou periodou (např. $A_{displ} = 70$ mm) z experimentu a numerické simulace. Ze srovnání je rovněž patrná dobrá shoda simulace a experimentu.



Obr. 13: Srovnání projekce tříbodového limitního cyklu $A_{displ} = 65$ mm získaného z experimentu a numerické simulace

6 Hlavní výsledky práce

Tato práce vznikla v rámci výzkumného záměru MSM 261100009: "Netradiční metody studia komplexních a neurčitých systémů", který patří k významným vědecko-výzkumným aktivitám na VUT v Brně od roku 1998. Přínosy této práce lze shrnout do následujících bodů:

- aplikace moderních teorií nelineárních dynamických systémů v oblasti mechaniky konstrukcí,
- ukázány klasifikační postupy a metody pro zařazení nelineárních jevů při vývoji konstrukcí,
- nalezena jednoduchá konstrukce s výraznými nelineárními projevy při užití běžných materiálů,
- navrženy a úspěšně vyzkoušeny experimentální postupy stanovení potřebných fyzikálně-mechanických charakteristik zvolené konstrukce,
- zjištěny vlastnosti útlumu vybrané konstrukce a nalezena jeho výstižná aproximace,
- vytvořen efektivní model zvolené konstrukce vhodný pro simulaci jejího chování,
- úspěšně proveden náročný experiment včetně verifikace vytvořeného modelu,
- nalezeny tři výrazné limitní cykly s odpovídajícím výskytem v experimentu i numerické simulaci,
- potvrzena možnost vzniku chaotického chování, jehož přítomnost byla předpokládána numerickými simulacemi.

7 Závěr

Předkládaná práce byla zaměřena na aplikaci nejnovějších poznatků o vlastnostech a možném chování široké třídy dynamických systémů, zejména však modelů mechanických konstrukcí. Bylo prokázáno, že nelineární projevy (např. zdvojení periody limitního cyklu či chaotické chování) systému, jenž může popisovat jednoduchou štíhlou konstrukci, jsou umožněny vnitřními vlastnostmi tohoto systému a nejsou způsobeny např. nepopsanými vnějšími vlivy, jak se dříve předpokládalo.

V úvodu práce byly přehledně rozděleny nelineární projevy deterministických systémů, tak jak jsou v současnosti známy, včetně vhodných metod pro jejich sledování a rozpoznávání. Bylo konstatováno, že klasické analytické nástroje, jako je např. spektrální analýza, jsou pro silně nelineární systémy nevhodné (nedokáží rozlišit šum a chaos).

Pro ověření reality poznatků získaných díky numerickému modelování systémů na počítači byl naplánován a proveden z hlediska požadovaných vlastností náročný dynamický experiment s pružnou štíhlou konstrukcí, která dosahovala velkých přemístění. Plánování tohoto experimentu a analýza získaných dat úzce souvisela se speciálním numerickým modelem konstrukce, vytvořeným pro tyto účely. Tento model byl v práci detailně popsán a odvozen.

Srovnání výsledků experimentu a numerických simulací tvoří nejvýznamnější část této práce. Navzdory složitosti chování systému bylo dosaženo dobré shody odezvy reálné konstrukce a jejího numerického modelu, což je dokumentováno zejména srovnáním bifurkačních diagramů a význačných limitních cyklů.

LITERATURA

- [1] Al-Qaisia A. A., Hamdan M. N., Bifurcations and chaos of an immersed cantilever beam in a fluid and carrying an intermediate mass, *Journal of Sound and Vibration* 253(4), p. 859-888, 2002
- [2] Ario I., Homoclinic bifurcation and chaos attractor in elastic two-bar truss, *International Journal of Non-linear Mechanics* 39, p. 605-617, 2004
- [3] Barrow J. D., *Teorie všeho – Hledání nejhlubšího vysvětlení* (orig. *Theories of Everything. The Quest for Ultimate Explanation*), nakladatelství Mladá fronta (orig. Oxford University Press, 1991), edice Kolumbus, svazek 133, Praha 1999
- [4] Bažant Z. P., Cedolin L., *Stability of Structures, Elastic, Inelastic, Fracture, and Damage Theories*, Oxford University Press, New York 1991
- [5] Brepta R., Půst L., Turek F., *Mechanické kmitání*, Technický průvodce 71, nakladatelství Sobotáles, Praha 1994
- [6] Brousil J., Slavík J., Zeman V., *Dynamika*, nakladatelství SNTL, Praha 1989
- [7] Coveney P., Highfield R., *Mezi chaosem a řádem* (orig. *Frontiers of Complexity*), nakladatelství Mladá fronta (orig. Faber and Faber, London 1995), edice Kolumbus, Praha 2003
- [8] Dalík J., *Matematika, Numerické metody*, skripta, nakladatelství VUT Brno, Brno 1992
- [9] Dwivedy S. K., Kar R. C., Non-linear dynamics of a slender beam carrying a lumped mass under principal parametric resonance with three-mode interactions, *International Journal of Non-linear Mechanics* 36, p. 927-945, 2001
- [10] Feynman R. P., Leighton R. B., Sands M., *Feynmanovy přednášky z fyziky*, nakladatelství FRAGMENT (orig. Addison Wesley Longman, Inc., CalTech 1964), Havlíčkův Brod 2000
- [11] Savi M. A., Pacheco P. M. C. L., Braga A. M. B., Chaos in a shape memory two-bar truss, *International Journal of Non-linear Mechanics* 37, p. 1387-1395, 2002
- [12] Gleick J., *Chaos: Vznik nové vědy* (orig. *Chaos: Making a New Science*, 1987), nakladatelství Ando Publishing, Brno 1996
- [13] Greene B. R., *Elegantní vesmír* (orig. *The Elegant Universe*), nakladatelství Mladá fronta (orig. W. W. Norton & Company, Inc., New York 1999), edice Kolumbus, svazek 156, Praha 2001

- [14] Grygar J., Vesmír, jaký je, Současná kosmologie /téměř/ pro každého, nakladatelství Mladá fronta, edice Kolumbus, svazek 135, Praha 1997
- [15] Hellman H., Velké spory na poli vědy (orig. Great Feuds in Science), nakladatelství HEL (orig. Jon Wiley & Sons, Inc.), Ostrava 2000
- [16] Henrych J. Úplná soustava finitních metod mechaniky a možnosti dalšího rozvoje, studie ČSAV 6.85, nakladatelství Akademia, Praha 1985
- [17] Hillis W. D., Vzor v kameni, Jednoduché myšlenky, které řídí počítače (orig. The Pattern on the Stone, Basic Books, New York 1998), nakladatelství Akademia, Praha 2003
- [18] Jensen J. S., Buckling of an elastic beam with added high-frequency excitation, International Journal of Non-linear Mechanics 35, p. 217-227, 2000
- [19] Horák J., Krlín L., Raidl A., Deterministický chaos a jeho fyzikální aplikace, nakladatelství Academia, Praha 2003
- [20] Kapitaniak T., Chaos for Engineers, Theory, Applications, and Control, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1998
- [21] Kolář I., Úvod do Thomovy teorie katastrof, nakladatelství Academia, Praha 1988
- [22] Kolář V., Chyby ve výpočtech konstrukcí, Projekční a konstrukční pomůcky, Česká matice technická, VUT v Brně, ročník 1995, číslo spisu 445, Brno a Ostrava 1995
- [23] Kosmatka J. B., An improved two-node finite element for stability and natural frequencies of axial-loaded timoshenko beams, Journal Computers & Structures, Vol. 57, No. 1, p. 141-149, 1995
- [24] Leech J. W., Klasická mechanika, nakladatelství SNTL (orig. Butler & Tanner Ltd., Frome, 1958), Praha 1970
- [25] Macur J., Úvod do teorie dynamických systémů a jejich simulace, nakladatelství PC-DIR s. r. o., Brno 1995
- [26] Macur J., Analýza časových řad, prezentace na komorním semináři Nelineární jevy v dopravním proudu, UAI FAST VUT v Brně, Brno 2004
- [27] Main I. G., Kmity a vlny ve fyzice, nakladatelství Academia Praha, Brno 1990
- [28] Mathiasson K., Axially and transversally loaded cantilever beam, internal report 79:10, Department of Structural Mechanics, Göteborg University, Göteborg 1979, Germany
- [29] Brdička M., Samek L., Sopko B., Mechanika kontinua, nakladatelství Academia, Praha 2000

- [30] Nosek J. (editor), Chaos, věda a filosofie, sborník příspěvků, Filosofie – nakladatelství filosofického ústavu AV ČR, Praha 1999
- [31] Pirner M., Fisher O., Identifikace změn v konstrukci s použitím dynamické zkoušky, sborník konference DYN-WIND 2003 (Proceedings of the 2nd International Conference on Dynamics of Civil Engineering and Transport Structures and Wind Engineering), str. 26-29, Tale 2003, Slovensko
- [32] Peterka F., Tondl A., Subharmonic motion of the Oscillator with Soft Impacts, národní konference Inženýrská mechanika 2002 (CD příloha), Svratka 2002
- [33] Rzanicin A. R., Ustojcivost ravnovesia uprugich sistem, Gosudarstvennoje izdatelstvo techniko-teoreticeskoj literatury, Moskow 1955
- [34] Rossi R., Numerical couplet analysis of flexible structures subjected to the fluid action, 5th International PhD Symposium in Civil Engineering, Delft Juni 2004, Netherlands
- [35] Smullyan R., Navěky nerozhodnuto (Úvod do logiky a zábavný průvodce ke Gödelovým objevům), (orig. Forever Undecided (A Puzzle Guide to Gödel)), A Borzoi Book, Alfred A. Knopf, Inc., New York 1987), nakladatelství Academia, Praha 2003
- [36] Šmiřák S., Energetické principy a variační metody v teorii pružnosti, doplňkový učební text pro distanční studium, STM FAST VUT v Brně, Brno 1998
- [37] Štěcha J., Havlena V., Teorie dynamických systémů, skripta, nakladatelství ČVUT, Praha 1999
- [38] Timoshenko S., Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill Book Company Inc., New York and London 1936
- [39] Vaněček A., Čelikovský S., Novým paradigmatickým deterministického chaosu jsou jeho kladné vlastnosti, příspěvek sborníku Chaos, věda a filosofie, Filosofie – nakladatelství filosofického ústavu AV ČR, Praha 1999
- [40] Wilson J. F., Callis E. G., The dynamics of loosely jointed structures, International Journal of Non-linear Mechanics 39, p. 503-514, 2004
- [41] Yagasaki K., Homoclinic and heteroclinic behavior in an infinite-degree-of-freedom Hamiltonian system: Chaotic free vibrations of an undamped, buckled beam, Physics Letters A 285, nakladatelství Elsevier, 2001
- [42] Zabel V., Applications of Wavelet Analysis in System Identification, ISM-Bericht 1/2003, Bauhaus-Universität Weimar, Germany

Autor



Jméno: **Petr Frantík**

E-mail: kitnarf@centrum.cz

Www: <http://kitnarf.webpark.cz/index.htm>

Odborné zaměření

Statická a dynamická stabilita štíhlých konstrukcí. Netradiční přístupy, aplikace teorie dynamických systémů a teorie chaosu pro analýzu konstrukcí. Vytváření modelů konstrukcí a numerických metod včetně jejich programové implementace. Vývoj numerických metod pro měření fraktální dimenze.