

## DEVELOPMENT OF FRACTURE PROCESS ZONE IN QUASI-BRITTLE BODIES DURING FAILURE

V. Veselý, P. Frantík <sup>1</sup>

**Summary:** *The paper introduces a methodology for an estimation of the size and shape of a fracture process zone evolving at the macroscopic crack tip in quasi-brittle materials during their tensile failure. The procedure is based on a general description of the stress field in cracked bodies done by Williams' power series in combination with the philosophy and selected features of classical non-linear fracture models for concrete, i.e. the equivalent elastic crack models and the cohesive crack models. The proposed procedure incorporated in existing methods for the fracture parameters determination is supposed to eliminate or substantially decrease the effect of the test specimen size and geometry (the effect of the specimen's free boundaries) on the determined values of fracture characteristics of quasi-brittle materials, from which the existing methods considerably suffer. The estimation of the fracture process zone development during the fracture is illustrated on numerically simulated fracture tests on three-point bending of notched beams.*

### 1. Úvod

Práce prezentovaná v předkládaném příspěvku je zaměřena na tahové porušování kvazikřehkých materiálů, konkrétně kompozitů na silikátové bázi. Pro postižení lomu takovýchto materiálů se používají nelineární modely porušení, jejichž parametry jsou obvykle získávány z lomových experimentů prováděných na zkušebních tělesech opatřených koncentratory napětí (zářezy) v různých zkušebních konfiguracích. Předpoklady a princip fungování těchto nelineárních modelů, stejně jako charakter zkoušek prováděných pro jejich kalibraci, však zapříčiňují závislost určených hodnot parametrů těchto modelů na velikosti a geometrii použitého zkušebního tělesa, respektive na vzdálenosti oblasti, v níž k procesům porušování dochází, od volných okrajů zkušebního tělesa.

V příspěvku je prezentován navrhovaný princip určování lomové charakteristiky kvazikřehkých materiálů, který má výše uvedené závislosti eliminovat či výrazně snížit. Tato metoda je založena na vztahování lomové práce, čili energie disipované při lomových procesech v blízkosti čela makroskopické trhliny šířící se přes ligament kvazikřehkého tělesa, k objemu zóny, ve které

<sup>1</sup> Ing. Václav Veselý, Ph.D., Ing. Petr Frantík, Ph.D., Institute of Structural Mechanics, Faculty of Civil Engineering, Brno University of Technology, Veveří 331/95, 602 00 Brno, tel.: +420 541 147 362, +420 541 147 376, e-mail: vesely.v1@fce.vutbr.cz, kitnarf@centrum.cz

k těmto procesům porušení dochází – tzv. lomové procesní zóny (dále jen LPZ). Velikost a tvar LPZ je podle navrhovaného konceptu konstruován na základě kombinace několika přístupů:

- *víceparametrové lineární elastické lomové mechaniky* skrze aproximaci pole napětí v okolí čela trhliny dle Williamse (Williams, 1957),
- *modelů ekvivalentní elastické trhliny* (Nallathambi a Karihaloo, 1986; Karihaloo, 1995) skrze odhad lokalizace čela efektivní trhliny během lomového procesu a
- *modelů kohezivní trhliny* (Hillerborg a kol., 1976; Shah a kol., 1995; Karihaloo, 1995; Bažant a Planas, 1998) skrze zavedení kohezivního zákona do procedury určování dosahu nelineární zóny.

Navrhovaný koncept je v příspěvku testován na numericky simulovaných lomových procesech probíhajících v tříbodově ohýbaných trámcih se zářezem pro různé velikosti trámců i relativní délky zářezů.

## 2. Teoretické zázemí

### 2.1. Pole napětí v tělese s trhlinou

Asymptotické pole napětí a deformací v tělese s trhlinou (neboli pole napětí a deformací pro nejbližší okolí vrcholu trhliny) je v rámci klasické lineární elastické lomové mechaniky (dále jen LELM) určeno jediným parametrem – obvykle faktorem intenzity napětí  $K$ . V ideálně křehkých materiálech dochází k porušení v jednom bodě, na vrcholu trhliny, pro který je asymptotický popis napjatosti pomocí  $K$  přesný. U kvazikřehkých materiálů či těles ovšem v okolí čela trhliny vzniká a vyvíjí se zóna porušení (LPZ), jejíž velikost není zanedbatelná ve srovnání s rozměry tělesa (včetně délky trhliny). Velikost této zóny značně převyšuje rozsah, ve kterém je možno napjatost popsat dostatečně přesně jen na základě  $K$ -faktoru.

Williamsovo řešení rovinného problému tělesa s trhlinou (Williams, 1957; Knésl a Bednář, 1998) poskytuje aproximaci pole napětí a deformací pomocí nekonečné mocninné řady. Pro tenzor napětí platí

$$\sigma_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \frac{n}{2} \right) r^{\frac{n}{2}-1} f_{ij}(n, \theta), \quad (1)$$

kde  $r$  a  $\theta$  jsou polární souřadnice, koeficienty  $A_n$  známé konstanty a  $f_{ij}$  známé funkce. Po detailním rozepsání mají složky tenzoru napětí následující tvar:

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \frac{n}{2} \right) r^{\frac{n}{2}-1} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \left[ 2 + (-1)^n + \frac{n}{2} \right] \cos \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \theta - \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \cos \left( \frac{n}{2} - 3 \right) \theta \\ \left[ 2 - (-1)^n - \frac{n}{2} \right] \cos \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \theta + \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \cos \left( \frac{n}{2} - 3 \right) \theta \\ - \left[ (-1)^n + \frac{n}{2} \right] \sin \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \theta + \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \sin \left( \frac{n}{2} - 3 \right) \theta \end{array} \right\}. \quad (2)$$

První člen nekonečné řady (1) resp. (2) je singulární vzhledem ke vzdálenosti  $r$  od vrcholu trhliny (jde k nekonečnu pro  $r \rightarrow 0$ , singularita je typu  $1/\sqrt{r}$ ) a konstanta  $A_1$  u tohoto členu rozvoje odpovídá faktoru intenzity napětí  $K$ . Druhý člen rozvoje je konstantní vzhledem k hodnotě souřadnice  $r$  a označuje se jako  $T$ -napětí. Další členy nabývají pro libovolné  $r$  konečných hodnot. Pro aproximativní popis napětí a deformací v blízkém okolí vrcholu trhliny je tedy možné uvažovat pouze první člen (případně první dva členy) této řady a zanedbat členy rozvoje pro  $n > 2$ , neboť ty pro  $r \rightarrow 0$  konvergují k nule. Potřebujeme-li však popsat i vzdálenější okolí vrcholu trhliny, což je právě případ kvazikřehkých materiálů, je nutné vzít do úvahy i další členy řady. Tento přístup pak lze považovat za aplikaci *víceparametrové LELM*.

## 2.2. Přístupy k modelování lomu v kvazikřehkých materiálech

Charakter lomu kvazikřehkých materiálů je stručně naznačen v úvodní sekci. Pro bližší informace je laskavý čtenář odkázán na monografie detailně zpracovávající uvedenou problematiku (Bažant a Planas, 1998; Karihaloo, 1995; Shah a kol., 1995; van Mier, 1997). Stěžejním rysem tahového porušení kvazikřehkých materiálů, jímž se tento článek zabývá, je existence LPZ u čela makroskopické trhliny. Tento jev je příčinou nelineárního lomového chování u těchto materiálů a podle přístupu k jeho postižení se nelineární lomové modely dělí do dvou základních skupin.

Nejjednoduššími nelineárními modely pro kvazikřehký lom jsou *modely ekvivalentní elastické trhliny*. Lomovou analýzu skutečné kvazikřehké konstrukce provádějí pomocí její záměny za elastickou konstrukci s delší trhlinou tak, aby chování obou těchto konstrukcí bylo ekvivalentní (ve smyslu odezvy na vnější zatížení). Používají k tomu aparátu LELM. Velikost efektivního přírůstku trhliny  $\Delta a_e$  se stanoví z podmínky shody vzdálených polí (pole napětí, deformace a posunů v oblastech vně neelastické zóny) skutečné a ekvivalentní elastické konstrukce.

Reprezentantem této třídy modelů, jenž je využíván v rámci zde prezentovaného výzkumu, je model efektivní trhliny (Nallathambi a Karihaloo, 1986). Tento model stanovuje délku efektivní trhliny v zatěžovaném tělese na základě změny sečné poddajnosti tělesa mezi počátkem a aktuálním krokem lomového procesu.

Podle *přístupu kohezivní trhliny* je trhlina a LPZ vyvíjející se v kvazikřehkém tělese během lomového procesu před jejím čelem modelována pomocí prodloužení původní trhliny o přírůstek délky trhliny  $\Delta a$  specifických vlastností. Na úseku jisté délky u čela trhliny jsou její líce svírány kohezivními silami, jejichž charakteristický průběh pro kvazikřehké materiály je znázorněn na obr. 4 nahoře. Průběh lomu modelovaný přístupem kohezivní trhliny lze shrnout následujícím způsobem: Jestliže vnější zatížení tělesa způsobí takové rozložení napětí na čele počáteční trhliny, že složka tenzoru napětí otevírající trhlinu překročí tahovou pevnost materiálu, začne se trhlina šířit a líce jejího prodloužení  $\Delta a$  jsou svírány kohezivním napětím o průběhu  $\sigma(w)$ , kde  $w$  je otevření trhliny. Tímto dějem je simulována skutečnost, že na vrcholu počáteční trhliny vznikla a začala se rozvíjet LPZ. Když při dalším růstu trhliny aktuální otevření trhliny v místě vrcholu počátečního defektu překročí kritickou hodnotu otevření trhliny  $w_c$ , celá kohezivní zóna se posouvá dále skrz těleso. Tato situace odpovídá oddělení LPZ od vrcholu počátečního defektu a její posun tělesem. Za posouvající se LPZ zůstává přírůstek volné trhliny bez působení kohezivních sil.

Níže představená technika konstrukce velikosti a tvaru LPZ používá nástroje modelu fiktivní trhliny (Hillerborg a kol., 1976), jenž je jedním ze zástupců třídy modelů kohezivní trhliny pro kvazikřehké materiály.

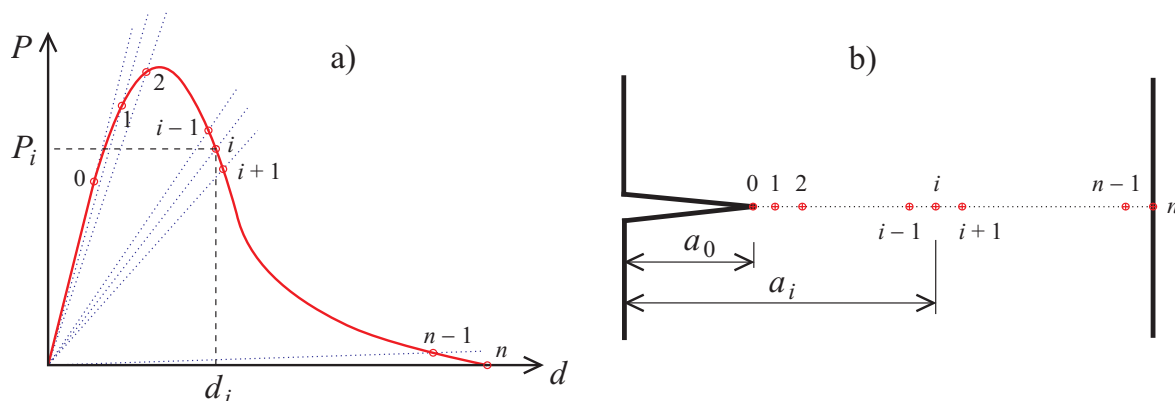
### 3. Syntéza přístupů, návrh metody

V této sekci je stručně popsána představa rekonstrukce průběhu lomového procesu v kvazi-křehkých tělesech, jejíž hlavním cílem je její využití při vyhodnocování lomových charakteristik ze záznamů lomových testů na laboratorních zkušebních vzorcích. Tato metodika má pomoci odstranit či zminimalizovat vliv velikosti, geometrie, resp. vzdálenosti LPZ od volných povrchů tělesa (jevy známé jako *size effect*, *geometry effect*, resp. *boundary effect*) na hodnoty lomových parametrů určených z laboratorních zkoušek. Tato rekonstrukce je postavena na syntéze přístupů naznačených v předchozí sekci.

#### 3.1. Odhad objemu lomové procesní zóny během lomového procesu

Použití nástrojů výše uvedených přístupů při zpracovávání záznamu lomové zkoušky, kterým je typicky zatěžovací diagram, čili závislost síly  $P$  na vneseném posunu  $d$  ( $P$ - $d$  diagram), umožňuje odhadnout tvar a objem zóny porušení materiálu (tj. zóny disipace energie). Metodika jejího určení pro  $i$ -tý krok lomového procesu (bod o souřadnicích  $[d_i, P_i]$ ) je objasněna pomocí následující sekvence procedur:

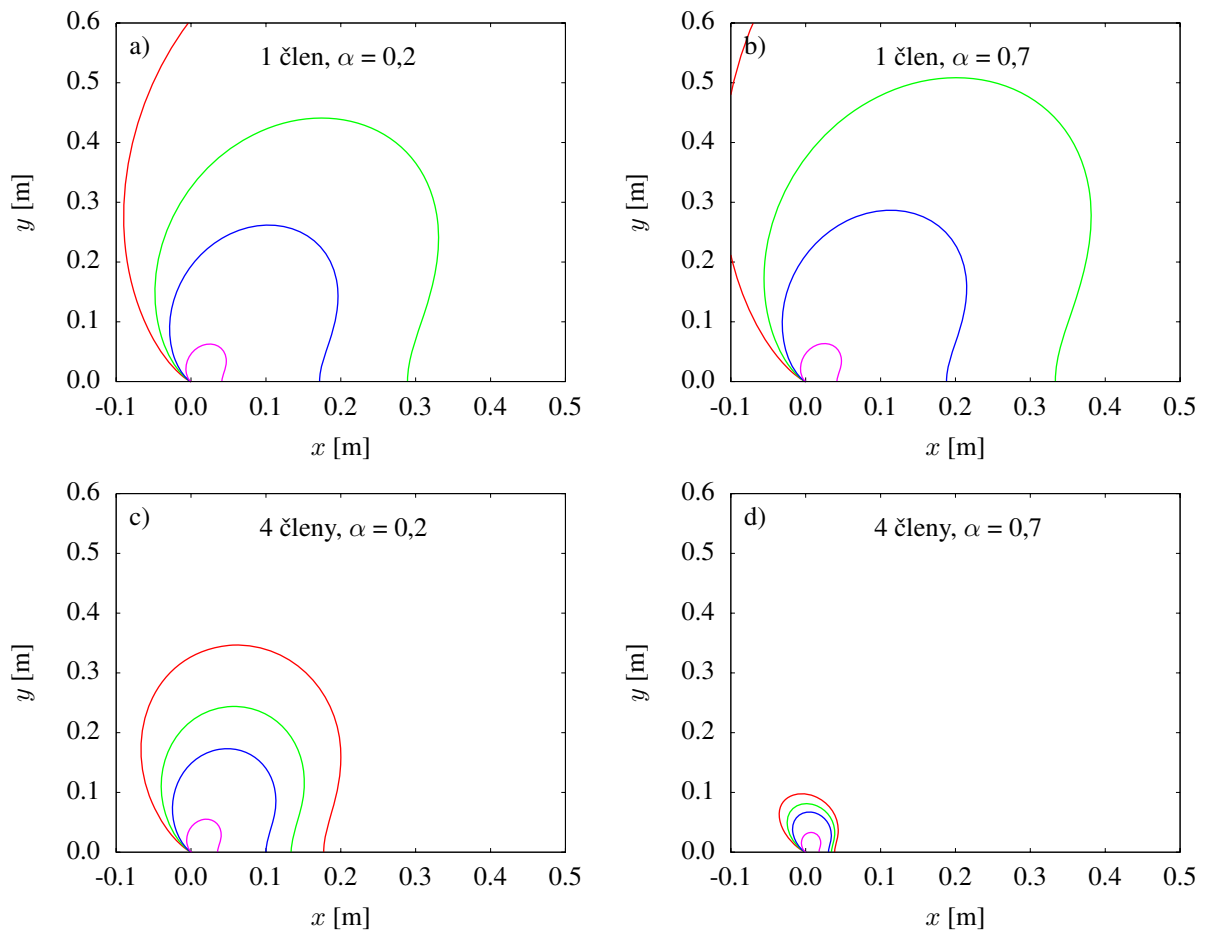
**Odhad lokalizace čela trhliny** – Výpočet délky trhliny pro jednotlivá stádia lomového procesu je prováděn pomocí zobecněné podoby modelu efektivní trhliny (Nallathambi a Karihaloo, 1986), kdy každé změně podajnosti tělesa s trhlinou odpovídá změna přírůstku délky trhliny. Uvedený postup je schematicky znázorněn na obr. 1. Připomeňme, že v intencích této třídy modelů lomu se jedná o tzv. *ekvivalentní elastickou trhlinu*, čili trhlinu ostrou, u jejíhož čela je pole napětí možné popsat postupem uvedeným v sekci 2.1.



Obrázek 1: a)  $P$ - $d$  diagram s vyznačením sečných podajností pro vybrané body lomového procesu, b) ligament tělesa s trhlinou s vyznačením vrcholů ekvivalentní elastické trhliny odpovídajících vybraným stádiím lomového procesu

**Odhad napjatosti v tělese s trhlinou** – Rozložení napětí v tělese s trhlinou v okolí vrcholu trhliny je aproximováno pomocí vztahů (2). Počet členů řady je nutno volit s ohledem na relaci předpokládané velikosti LPZ k velikosti tělesa resp. ke vzdálenostem LPZ od volných okrajů tělesa. Mezi hlavní znaky ovlivňující velikost LPZ patří hodnota tahové pevnosti materiálu a míra constraintu (stísnění) napětí/deformace u vrcholu trhliny, která je závislá na zkušební geometrii. Na obr. 2 jsou vykresleny izolinie napětí otevírajícího trhlinu  $\sigma_{yy}$  pro tříbodově ohýbaný trámec s relativními délkami trhliny  $\alpha = a/W$  rovnými

0,2 a 0,7 pro jeden a čtyři členy rozvoje (2). Hodnoty koeficientů  $A_1$  až  $A_4$  byly převzaty z Knésl a Bednář (1998). V grafech je vzhledem k symetrii zobrazena pouze část jedné poloviny tělesa. Izolinie stejných barev pro stádía lomu se stejným  $\alpha$  odpovídají stejným hodnotám napětí. Pro různé poměry  $\alpha$  si izolinie kvantitativně neodpovídají. Obrázek ilustruje nutnost užití více členů Williamsova rozvoje pro popis pole napětí dále od vrcholu trhliny. Markantní je rozdíl v oblasti vysoké úrovně constraintu (srov. obr. 2b) a d)).



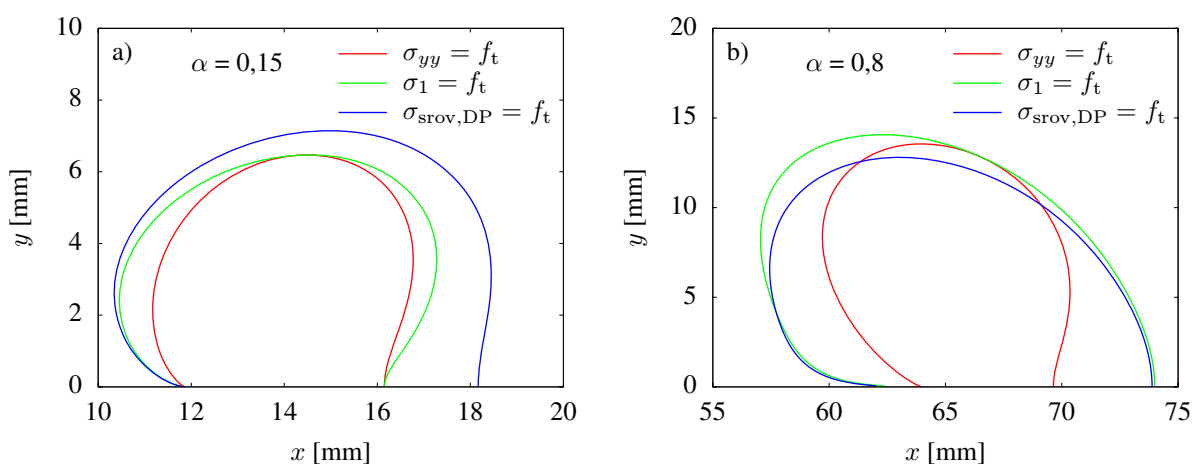
Obrázek 2: Izolinie napětí  $\sigma_{yy}$  u čela trhliny pro zkušební geometrii tříbodově ohýbaného trámce s trhlinou relativní délky  $\alpha = 0,2$  (vlevo) a  $\alpha = 0,7$  (vpravo) pro jeden (nahore) a čtyři (dole) členy Williamsova rozvoje

**Odhad tvaru a velikosti přírůstku lomové procesní zóny** – Rozsah zóny, ve které dochází ke vzniku porušení dosud elastického materiálu, se určí na základě porovnání hodnoty tahové pevnosti s vhodnou charakteristikou pole napětí v okolí vrcholu trhliny. Touto veličinou může být v nejjednodušším případě složka napětí otevírající trhlinu  $\sigma_{yy}$ . Při uvážení, že se zde (v rámci rozumného zjednodušení) jedná o rovinný problém, je ovšem přesnější použít alespoň hlavní tahové napětí  $\sigma_1$ , nebo ještě lépe srovnávací napětí odpovídající některému z vhodných kritérií porušení. V rámci elasto-plastické lomové mechaniky aplikované např. na kovy se pro odhad velikosti plastické zóny, což je úloha analogická s tímto problémem, používají von Misesova či Trescova podmínka plasticity (Seitl, 2002). Pro cementové

kompozity se může jednat například o Drucker-Pragerovo kritérium (Wikipedie, 2008). Tuto oblast označme za „plastickou zónu“<sup>2</sup> a její hranici symbolem  $\Omega_{\sigma_{\text{koh}}(w)=f_t}$  nebo zjednodušeně  $\Omega_{\text{PZ}}$ . Na obr. 3 je tato zóna znázorněna, zobrazený příklad odpovídá rovněž geometrii tříbodově ohýbaného trámce se zářezem, zde pro  $\alpha = 0,15$ , resp.  $\alpha = 0,8$ , uvažovány jsou 4 členy mocninného rozvoje (2). „Plastická zóna“ je vykreslena pro běžné laboratorní těleso o rozměrech délka  $\times$  výška  $\times$  tloušťka rovny  $480 \times 80 \times 80$  mm s  $\alpha_0 = 0,1$  vyrobené z betonu o tahové pevnosti  $f_t$  rovné cca 3,7 MPa pro tři uvažovaná kritéria porušení. Pevnost vtahu  $f_t$  je srovnávána (zleva) se  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_1$  a srovnávacím napětím určeným z Drucker-Pragerovy podmínky porušení jako

$$\sigma_{\text{srov,DP}} = f_c \frac{3\sqrt{J_2} + \sqrt{3}I_1}{\sqrt{3}I_1 - 3\sqrt{J_2} + 2\sqrt{3}f_c} \quad (3)$$

V tomto vztahu  $f_c$  značí tlakovou pevnost materiálu,  $I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$  je první invariant hydrostatické složky tenzoru napětí a  $J_2 = [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]/6$  je druhý invariant deviatorické složky tenzoru napětí. Byl uvažován stav rovinné napjatosti, tj.  $\sigma_3 = 0$ .



Obrázek 3: Zobrazení „plastické zóny“, čili zóny, ve které je v daném kroku lomového procesu překročena tahová pevnost materiálu pro podmínky porušení  $\sigma_{yy} > f_t$ ,  $\sigma_1 > f_t$ ,  $\sigma_{\text{srov,DP}} > f_t$ : a)  $\alpha = 0,15$ , b)  $\alpha = 0,8$

**Odhad otevření trhliny** – Hodnoty otevření trhliny v jednotlivých bodech na lících trhliny, jež v rámci zde popisované metodiky slouží jako vstupy pro určování hodnoty funkce tahového změkčení (neboli kohezivního napětí – viz následující bod), jsou určovány dle LELM. Stejně jako v předchozích krocích se zde pracuje s ostrou trhlinou efektivní délky. Pro zde prezentovanou analýzu byl pro určení otevření trhliny použit LELM vztah z Tada a kol. (2000).

**Odhad dosahu lomové procesní zóny** – Zóna zobrazovaná na obr. 3 není reprezentací celé LPZ. Zahrnuje pouze část nelineární zóny, která se k existující LPZ při aktuálním přírůstku

<sup>2</sup> Termín „plastická zóna“ zde není zcela namístě, protože mechanismy porušování v této zóně se odlišují od mechanismů charakteristických pro elasto-plastický lom. Je zde užíván z důvodů zjednodušení značení a analogie s určováním plastické zóny u duktilních materiálů.

délky trhliny připojila, jelikož v ní byla překročena limitní hodnota napětí určená podle uvažovaného kritéria porušení. Zde prezentovaný koncept však předpokládá, v souladu s přístupem kohezivní trhliny, že lomová procesní zóna sahá až k bodu na lících vznikající trhliny, kde její otevření přesáhne kritickou hodnotu  $w_c$ . Pro obecný průběh kohezivního napětí se rozsah LPZ pro  $i$ -té stádium lomového procesu stanovuje tak, že pro aktuální a předcházející stádium lomu jsou určovány a kumulovány oblasti, které vzniknou průnikem:

- i) Sjednocení „plastických zón“, čili zón, kdy zvolená charakteristika pole napětí určující tahové porušení materiálu (tuto veličinu zde nazvěme jednoduše srovnávací napětí  $\sigma_{srov}$ ) překročí tahovou pevnost, pro jednotlivé vrcholy trhlín odpovídající jednotlivým zaznamenaným bodům  $j$  na  $P$ - $d$  diagramu od začátku lomového procesu (bodů 0) až do jeho aktuálního stádium (bodů  $i$ ), tedy  $j \in \langle 0, i \rangle$ .

Toto sjednocení provedené pro celý  $P$ - $d$  diagram ( $j \in \langle 0, n \rangle$ ) vytvoří pás, obecně měnící se šířky, procházející skrze celý ligament tělesa, ve kterém v průběhu lomového procesu docházelo k porušování materiálu, tj. disipaci energie. Hranici této oblasti, neboli obálku hranic  $\Omega_{PZ,j}$  pro  $j \in \langle 0, n \rangle$ , zde označme  $\Omega_{WRAP,n}$  či  $\Omega_{WRAP}$ .

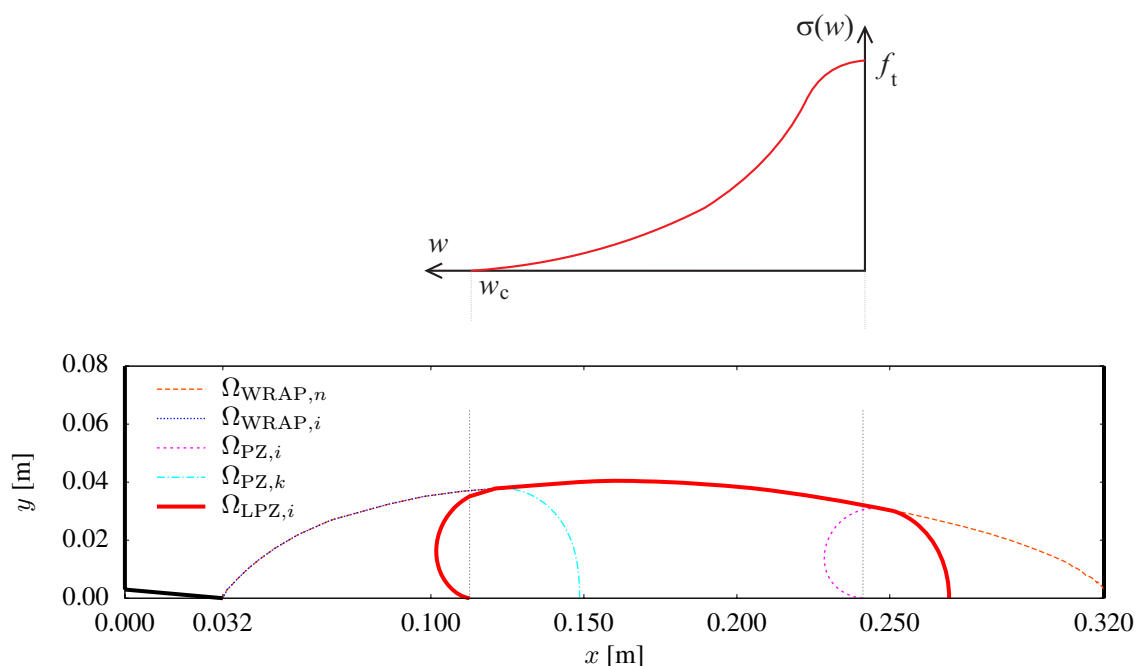
- ii) Zóny určené pro vrchol trhliny odpovídající bodu  $i$ , ve které hodnota srovnávacího napětí  $\sigma_{srov}$  je větší než hodnota kohezivního napětí  $\sigma_{koh}(w_j)$  pro předcházející stádium lomu  $j$ . Její hranici značíme  $\Omega_{\sigma_{koh}(w_j)}$ .

Je zřejmé, že zónu  $\Omega_{\sigma_{koh}(w_j)}$  nekonstruujeme pro všechny indexy  $j$  z množiny  $\langle 0, i \rangle$ , nýbrž pouze pro její podmnožinu  $\langle k, i \rangle$ . Index  $k$  označuje takové předešlé stádium lomu, jemuž odpovídající poloha vrcholu trhliny, která v aktuálním, tedy  $i$ -tém, stádium lomu představuje bod na lících aktuální trhliny, kde otevření trhliny  $w_k$  dosáhne kritické hodnoty  $w_c$ .

Pro kvazikřehké materiály, jejichž typický průběh kohezivního napětí je naznačen na obr. 4 nahoře, je vzhledem k monotónně klesající funkci  $\sigma_{koh}(w)$  a hodnotě  $\sigma_{koh}(w_c) = 0$  lomová procesní zóna pro vrchol trhliny odpovídající bodu  $i$  ohraničena křivkami  $\Omega_{WRAP,i}$  a  $\Omega_{PZ,k}$ . Hranici LPZ pro stádium lomu  $i$  označíme  $\Omega_{LPZ,i}$ . Její čelo představuje „přední“ část hranice „plastické zóny“  $\Omega_{PZ,i}$ , konec (ocas) LPZ je tvořen „zadní“ částí hranice oblasti  $\Omega_{PZ,k}$  a „shora“ i „zdola“ je LPZ ohraničena křivkou  $\Omega_{WRAP,i}$ , resp.  $\Omega_{WRAP}$ . Konstrukce LPZ u kvazikřehkých materiálů je znázorněna na obr. 4 pro třibodově ohybaný trámec o rozměrech  $L \times W \times B$  rovných  $1,92 \times 0,32 \times 0,08$  m se zářezem délky  $a_0 = 0,032$  m vyrobený z betonu, jehož charakteristiky jsou uvedeny výše. Uvažovány jsou 4 členy mocninného rozvoje (2) a Drucker-Pragerova podmínka porušení (za stavu rovinné napjatosti). Tlustými čarami jsou v grafu vyznačeny líc trhliny a přední a zadní povrch trámce.

Zde popsáný způsob ohraničení LPZ pro bod  $i$  vychází z předpokladu, že disipace energie v lomových procesech bude probíhat v těch bodech tělesa, kde srovnávací napětí v dosažených stádiích lomu překročilo tahovou pevnost (materiál v těchto místech byl narušen), a současně je v daném okamžiku v těchto bodech srovnávací napětí o hodnotě větší než odpovídající hodnota kohezivního napětí. Tato metodika konstrukce LPZ, zejména v její zadní části, zřejmě dosti hrubě zjednodušuje skutečnost, neboť předpokládá, že do LPZ pro bod  $i$  je zahrnuta i celá „plastická zóna“ vzniklá při existenci vrcholu trhliny v pozici  $k$ . Hodnota kohezivního napětí v těchto místech v aktuálním stádium  $i$  se však blíží k nule (v porovnání se stádiem, kdy vrchol trhliny byl v bodě  $k$ , tehdy se hodnota kohezivního

napětí rovnala  $f_t$ ), což indikuje, že i dosah okolí tohoto bodu, v němž probíhají mechanismy porušení materiálu způsobující disipaci energie, bude klesat a patrně bude výrazně menší než velikosti celého obsahu  $\Omega_{LPZ,k}$ . Tento postup také nezohledňuje tvar funkce tahového změkčení. Varianty alternativního vyjádření ocasu LPZ jsou předmětem dalšího zkoumání.



Obrázek 4: Znázornění konstrukce LPZ: tvar tahového změkčení pro kvazikřehké materiály (nahore), zobrazení průníků křivek ohraničujících LPZ (dole)

### 3.2. Specifikace lomové práce objemem lomové procesní zóny

Hlavním důvodem pro vytvoření představené metodiky rekonstrukce tvaru a velikosti LPZ je požadavek na vztažení energie disipované během lomového procesu v kvazikřehkém tělese k charakteristice oblasti, ve které k této disipaci dochází. Velikost této oblasti (LPZ) je u kvazikřehkých materiálů značná, navíc se jedná o prostorovou záležitost. Metody určování lomových parametrů vycházející z klasických nelineárních modelů lomu betonu (viz sekce 2.2.) 3D charakter této oblasti ignorují, z čehož plyne závislost hodnot takto zjištěných parametrů na velikosti a tvaru zkušební tělesa a okrajových podmínkách testů, což lze vyjádřit také jako závislost na poměru rozsahu LPZ a její vzdálenosti k volným povrchům zkušební tělesa. Tyto jevy jsou označovány jako *size effect* a *geometry effect*, respektive *boundary effect*. V literatuře je této problematice dlouhodobě věnována značná pozornost (Bažant, 1996; Bažant a kol., 1991; Bažant a Kazemi, 1990; Bažant a Planas, 1998; Duan a kol., 2002, 2003a,b; Duan a Wittmann, 2006; Hu a Duan, 2004; Hu a Wittmann, 1992, 2000; Karihaloo, 1995; Karihaloo a Abdalla, 2004; Karihaloo a kol., 2003; Ouyang a kol., 1990; Shah a kol., 1995; Trunk a Wittmann, 2001). V uvedených pracích lze nalézt navržené metody s rozličnými konceptuálními přístupy, které v různé míře výše uvedené efekty odstraňují. Studium souvislostí kvazikřehkého lomového chování s explicitním vyjádřením tvaru a velikosti LPZ však prozatím autory v literatuře objeveno



nebylo, proto se pokoušejí danou problematiku prozkoumat z této perspektivy. Prezentovaný článek představuje pilotní výsledky ze studia tohoto tématu.

Podnětem pro výzkum v této oblasti byly také výsledky vlastních rozsáhlých numerických experimentů, které jasně ukazovaly na potřebu najít souvislosti mezi parametry LPZ v kvazikřehkých materiálech a jejich nelineárním lomovým chováním (Veselý a kol., 2007a,b,c,d; Řoutil a kol., 2008). Tento článek je zaměřen pouze na první část zpracovávané problematiky, tj. odhad velikosti a tvaru LPZ.

#### 4. Ověření a aplikace navržené metodiky

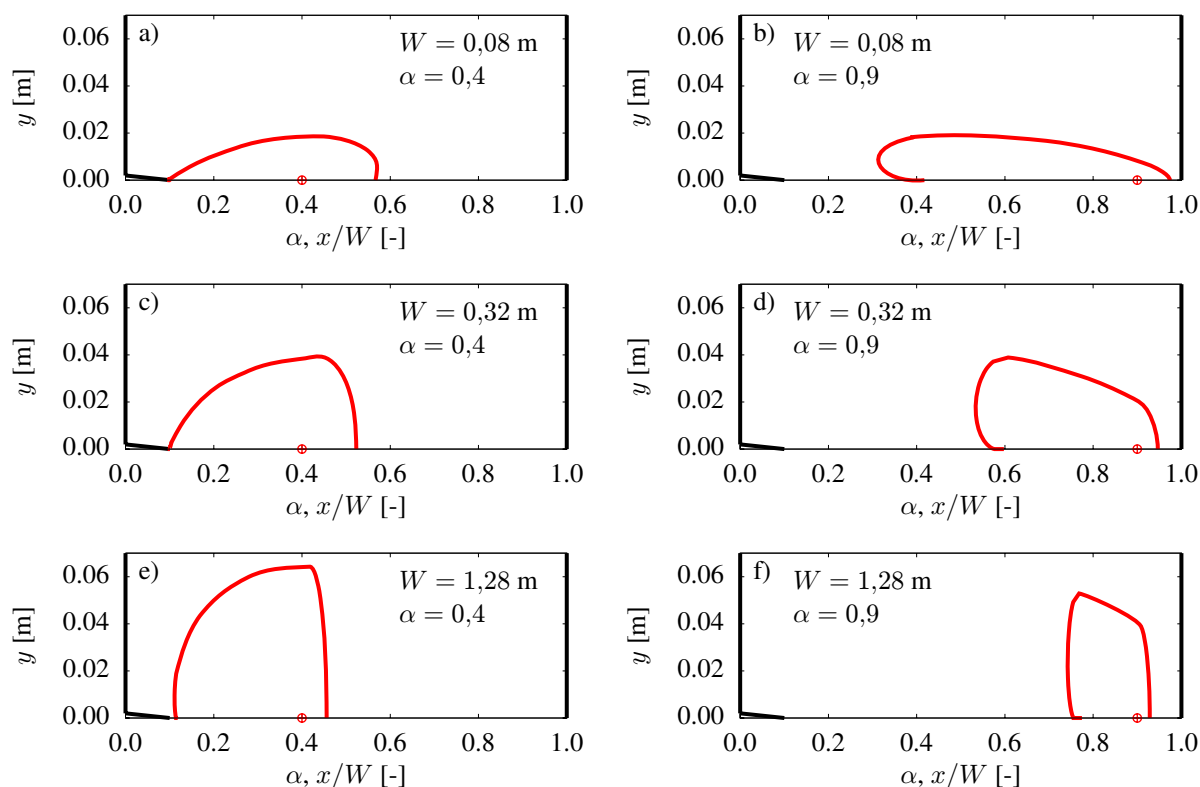
Představený postup odhadu LPZ je zde ilustrován na výsledcích numericky simulovaného lomového testu v konfiguraci tříbodově ohýbaného trámce se zářezem. Tyto simulace jsou částí rozsáhlé numerické studie (Veselý a kol., 2007c,b; Řoutil a kol., 2008) prováděné na třech zkušebních konfiguracích lišících se mírou constraintu na čele trhliny. Tělesa podrobená tomuto numerickému experimentu se lišila velikostí (poměr nejmenšího a největšího tělesa byl 1:16) a relativní délkou zářezu (rozsah  $\alpha_0 = a_0/W$  od 0,1 do 0,85). Simulace byly provedeny v programu ATENA 2D (Červenka a kol., 2005). Pro detailní informace týkající se numerických simulací je čtenář odkázán na práce uvedené výše v tomto odstavci.

Na obr. 5 jsou porovnány rekonstrukce lomových procesních zón pro tři velikosti trámců (odshora výška trámce  $W = 80, 320$  a  $1280$  mm) se zářezem o relativní délce  $\alpha_0 = 0,1$  pro stádium lomu, kdy relativní délka efektivní trhliny  $\alpha = 0,4$  (vlevo) a  $0,9$  (vpravo). V rámci testované procedury odhadu rozsahu LPZ byly použity 4 členy Williamsova rozvoje (2) a Drucker-Pragerovo kritérium porušení. Hodnoty pevností materiálu a kohezivní zákon použitý pro konstrukci LPZ se shodoval s odpovídajícími parametry použitými jako vstupy do numerických simulací pomocí softwaru ATENA – pro detaily viz např. Veselý a kol. (2007c).

#### 5. Závěr

Článek představuje metodiku pro určení velikosti a tvaru lomové procesní zóny, jež je typickým znakem doprovázejícím nelineární lomový proces v kvazikřehkých materiálech. Tato metodika využívá kombinace různých přístupů k postižení lomu: víceparametrovou lomovou mechaniku pro zpřesnění pole napětí v tělese s trhlinou, koncept modelů efektivní trhliny pro odhad polohy čela trhliny během lomu a modely kohezivní trhliny pro určení dosahu zóny porušení materiálu, čili zóny disipace energie. Tato metodika je vyvíjena za účelem vytvoření postupu (či zpřesnění stávajících postupů) pro určování lomových parametrů kvazikřehkých materiálů nezávislých na velikosti a geometrii zkušebního tělesa, respektive nezávislých na vzdálenosti oblasti lomu od volných okrajů tělesa.

V rámci prvotních testů této vyvíjené metodiky bylo zjištěno, že pro popis pole napětí v kvazikřehkém tělese s trhlinou je třeba použít větší počet členů Williamsova mocninného rozvoje, než se používá u křehkého či elastoplastického lomu (při existenci plastické zóny malého rozsahu). Jejich potřebný počet je odvislý od poměru vnitřní délky charakterizující nehomogenitu materiálu a velikosti a geometrie zkoumané konstrukce. Významnou roli zde také hraje tahová pevnost materiálu a lomové parametry přístupu kohezivní trhliny, tj. tvar funkce tahového změkčení a lomová energie (nebo kritické otevření trhliny). Analýza provedené studie také ukázala, že velikost a tvar LPZ je ovlivňován uvažovaným kritériem porušení. Procedura určování rozsahu LPZ na základě principu modelu kohezivní trhliny je zatím stále zkoumána



Obrázek 5: LPZ vyvíjející se v tříbodově ohybaném trámci se zářezem s  $\alpha_0 = 0,1$  pro aktuální relativní délku trhliny (vrchol vyznačen)  $\alpha = 0,4$  (vlevo) a  $0,9$  a výšky trávce  $W = 80$  (nahore),  $320$  a  $1280$  mm (dole)

a zvažují se její úpravy.

Celý postup navrhované metodiky se vytváří jako aplikace v jazyce Java, jež má sloužit jako nástroj pro vyhodnocování lomových parametrů zejména cementových kompozitů Veselý a Frantík (2008).

## 6. Poděkování

Tento výsledek byl získán za finančního příspěvní MŠMT, projekt 1M0579, v rámci činnosti výzkumného centra CIDEAS. Při řešení byly částečně využity teoretické výsledky dosažené v projektu GA ČR 103/07/P403.

## 7. Literatura

- Bažant, Z.P. (1996) Analysis of work-of-fracture method for measuring fracture energy of concrete. *J. Eng. Mech.*, 122(2): 138–144.
- Bažant, Z. P., Gettu, R., Kazemi, M. T. (1991) Identification of nonlinear fracture properties from size effect tests and structural analysis based on geometry-dependent R-curves. *International Journal of Rock Mechanics, Mining Science & Geomechanics Abstracts*, 28(1): 43–51.

- Bažant, Z. P., Kazemi, M. T. (1990) Determination of fracture energy, process zone length and brittleness number from size effect, with application to rock and concrete. *Int. J. Fract.*, 44: 111–131.
- Bažant, Z. P., Planas, J. (1998) Fracture and size effect in concrete and other quasi-brittle materials. Boca Raton: CRC Press.
- Červenka, V. et al. (2005) ATENA Program Documentation, Theory and User manual. Prague: Cervenka Consulting.
- Duan, K., Hu, X.-Z., Wittmann, F. H. (2002) Explanation of size effect in concrete fracture using non-uniform energy distribution. *Mater. Struct.*, 35: 326–331.
- Duan, K., Hu, X.-Z., Wittmann, F. H. (2003a) Boundary effect on concrete fracture and non-constant fracture energy distribution. *Eng. Fract. Mech.*, 70: 2257–2268.
- Duan, K., Hu, X.-Z., Wittmann, F. H. (2003b) Thickness effect on fracture energy of cementitious materials. *Cem. Concr. Res.*, 33: 499–507.
- Duan, K., Hu, X.-Z., Wittmann, F. H. (2006) Scaling of quasi-brittle fracture: Boundary and size effect. *Mech. Mater.*, 38: 128–141.
- Hillerborg, A., Modéer, M., Petersson, P.-E. (1976) Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cem. Concr. Res.*, 6: 773–782.
- Hu, X.-Z., Duan, K. (2004) Influence of fracture process zone height on fracture energy of concrete. *Cem. Concr. Res.*, 34: 1321–1330.
- Hu, X.-Z., Wittmann, F. H. (1992) Fracture energy and fracture process zone. *Mater. Struct.*, 25: 319–326.
- Hu, X.-Z., Wittmann, F. H. (2000) Size effect on toughness induced by crack close to free surface. *Eng. Fract. Mech.*, 65: 209–221.
- Karihaloo, B. L. (1995) Fracture mechanics and structural concrete. New York: Longman Scientific & Technical.
- Karihaloo, B. L., Abdalla, H. M. (2004) A method for constructing a bilinear tension softening diagram of concrete corresponding to its true fracture energy. *Mag. Concr. Res.*, 56: 597–604.
- Karihaloo, B. L., Abdalla, H. M., Imjai, T. (2003) A simple method for determining the true specific fracture energy of concrete. *Mag. Concr. Res.*, 55: 471–481.
- Knésl, Z. & Bednář, K. (1998) *Two-parameter fracture mechanics: Calculation of parameters and their values* (in Czech). Brno: Institute of Physics of Materials, Czech Academy of Sciences.
- Nallathambi, P., Karihaloo, B. L. (1986) Determination of specimen-size independent fracture toughness of plain concrete. *Mag. Concr. Res.*, 38: 67–76.
- Ouyang, C., Mobasher, B., Shah, S. P. (1990) An R-curve approach for fracture of quasi-brittle materials. *Eng. Fract. Mech.*, 37(4): 901–916.
- RILEM Committee FMT 50 (1985) Determination of the fracture energy of mortar and concrete by means of three-point bend test on notched beams. *Mater. Struct.*, 18: 285–290.
- Řoutil, L., Veselý, V., Keršner, Z., Seitl, S., Knésl, Z. (2008) Fracture process zone size and

- energy dissipated during crack propagation in quasi-brittle materials. In: Pokluda, J., Lukáš, P., Šandera, P., Dlouhý I. (eds.), *Proc. of 17th European Congress on Fracture – ECF 2008 (book of abstracts + CD-ROM)*, Brno. Vutium, 97 + CD 8 p.
- Seitl, S. (2002) Studium plastické zóny v rámci dvouparametrové lomové mechaniky. In: Sborník konference s mezinárodní účastí *Výpočtová mechanika 2002*, Nečtiny, 423–430.
- Shah, S. P., Swartz, S. E., Ouyang, C. (1995) *Fracture mechanics of structural concrete: applications of fracture mechanics to concrete, rock, and other quasi-brittle materials*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Tada, H., Paris, P. C., Irwin, G. R. (2000) *The stress analysis of cracks handbook, 3rd ed.* Bury St. Edmunds, UK: Professional Engineering Publishing, Ltd.
- Trunk, B., Wittmann, F. H. (2001) Influence of size on fracture energy of concrete. *Mater. Struct.*, 34: 260–265.
- van Mier, J. G. M. (1997) *Fracture Processes of Concrete: Assessment of Material Parameters for Fracture Models*. Boca Raton: CRC Press, Inc.
- Veselý, V., Frantík, P., (2008) *ReFraPro – Reconstruction of Fracture Process*. Java aplikace.
- Veselý, V., Keršner, Z., Řoutil, L. (2007a) Fracture energy of quasi-brittle materials: variants of its expression and determination, and related effects. In proceedings of *Engineering mechanics 2007 (Book of extended abstracts + CD ROM)*, Svratka, 14–17 May 2007. I. Zolotarev (ed.). Prague: Institute of Thermomechanics, Academy of Sciences of the Czech Republic, v.v.i. 315–316 + CD 13 p.
- Veselý, V., Keršner, Z., Knésl, Z. (2007b) Fracture of advanced building materials: aspects of modelling. In proceedings of *Third International Conference on Structural Engineering, Mechanics and Computation – Recent Developments in Structural Engineering, Mechanics and Computation (Book of extended abstracts + DVD-ROM)*, Cape Town, South Africa, 10–12 September 2007. A. Zingoni (Ed.). Rotterdam: Millpress Science Publishers, 241–242 + DVD 6 p.
- Veselý, V., Řoutil, L., Keršner, Z. (2007c) Structural geometry, fracture process zone and fracture energy. In: Carpinteri Al., Gambarova, P., Ferro, G., Plizzari, G. (eds.), *Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures (Proc. FraMCoS-6)*, Catania, Italy. Taylor & Francis/Balkema, vol. 1, 111–118.
- Veselý, V., Řoutil, L., Keršner, Z. (2007d) Vliv velikosti a geometrie zkušebního tělesa na rozsah a tvar lomové procesní zóny a lomovou energii cementových kompozitů. Sborník konference *Křehký lom 2007*, Brno, 30. 10.–1. 11. 2007. I. Dlouhý (ed.). Brno: Ústav fyziky materiálů AV ČR, 275–284.
- Wikipedia, the free encyclopedia – Stress (mechanics), Yield surface, <http://en.wikipedia.org>.
- Williams, M. L. (1957) On the stress distribution at the base of stationary crack. *ASME J. Appl. Mech.*, 24: 109–114.